Über die Reflexion an isotropen, durchsichtigen Medien.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der philosophischen Doktorwürde

der hohen

Philosophischen Fakultät der Königl. Universität Breslau

eingereicht

und mit ihrer Genehmigung veröffentlicht von

Reinhard Kynast

ACAD. LEOPOLDINA BIBL.

Freitag den 21. Dezember 1906 mittags 12 Uhr

in der Aula Leopoldina

VORTRAG:

„Über das Verhältnis der theoretischen zur experimentellen Physik“

und

Promotion.

Breslau 1906

Druck von Grass, Barth & Comp. (W. Friedrich)

Gedruckt mit Genehmigung der hohen philosophischen Fakultät der Kgl. Universität Breslau.

Referenten: Prof. Dr. **Lummer** und Prof. Dr. **Pringsheim.**

Termin der mündlichen Prüfung: 14. November 1906.

Herrn Professor Lummer

aus Dankbarkeit

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543102_0071

I. Historische Einleitung.

§ 1. Gewöhnliche Reflexion.

Läßt man linear polarisiertes[1]) Licht von bestimmter Schwingungsdauer auf die ebene Grenzfläche zweier isotroper durchsichtiger Medien — und nur von solchen ist im folgenden die Rede — von verschiedenem Brechungsindex auffallen, so teilt sich dasselbe im allgemeinen in reflektiertes und gebrochenes Licht, welches wiederum annähernd linear polarisiert ist, und zwar ist die Schwingungsebene des reflektierten und gebrochenen Lichtes im allgemeinen eine andere als die des einfallenden. Dabei wird vorerst von der Totalreflexion abgesehen, es handelt sich also in diesem ersten Abschnitt stets um gewöhnliche Reflexion. Das Problem, aus dem gegebenen Einfallswinkel und der gegebenen Lage der Schwingungsebene des einfallenden Strahls die Lagen der Schwingungsebenen des reflektierten und gebrochenen Strahls zu berechnen, wurde zuerst von Fresnel[2]) im Jahre 1821 gelöst, indem er den Äther als ein elastisches Medium ansah, dessen Dichtigkeit in Medien von verschiedenem Brechungsindex verschieden ist. Denkt man sich den Amplitudenvektor des einfallenden, sowie reflektierten und gebrochenen Strahls in zwei Komponenten — die Hauptkomponenten — zerlegt, welche parallel und senkrecht zur Einfallsebene liegen, so stellen die „Fresnelschen Formeln" die vier Hauptkomponenten des reflektierten und gebrochenen Strahls als Funktionen des Einfallswinkels und der beiden Komponenten des einfallenden Strahls dar. Diese Formeln ergeben, daß im Falle der gewöhnlichen Reflexion sowohl der durchgehende als auch der reflektierte Strahl streng linear polarisiert sind, wenn es der einfallende Strahl ist. (Im folgenden wollen wir stets die Voraussetzung machen, daß das einfallende

---

[1]) Es wird hier stets angenommen, daß der Lichtvektor auf der Polarisationsebene senkrecht steht, d. h. es wird, in der Sprache der Maxwellschen Theorie zu reden, der Lichtvektor mit dem elektrischen Vektor identifiziert.

[2]) Fresnel, Ann. d. chim. et d. phys. (2) **17**. p. 190 u. 312. 1821.

Licht linear polarisiert ist.) Die damaligen Experimente bestätigten im allgemeinen diese Fresnelsche Theorie in ausgezeichneter Weise. Indessen hatte bereits sechs Jahre vor den Fresnelschen Arbeiten Brewster[1]) darauf hingewiesen, daß der reflektierte Strahl nicht bei jedem Einfallswinkel linear polarisiert sein könne. Die folgenden Jahrzehnte brachten Untersuchungen insbesondere von Airy[2]) und A. Seebeck[3]) über stark brechende Substanzen, welche nur durch die Annahme zu erklären waren, daß das Licht, welches unter dem Polarisationswinkel, d. h. demjenigen Winkel, bei welchem die in der Einfallsebene schwingende reflektierte Komponente der einfallenden gegenüber am meisten geschwächt ist, stark elliptisch polarisiert sei, also eine erhebliche Phasendifferenz zwischen den beiden reflektierten Hauptkomponenten bestehen müsse. Inzwischen entwickelten Cauchy[4]) und seine Nachfolger[5]) einerseits und Green[6]) in England andrerseits eine Reflexionstheorie für isotrope Medien ebenfalls aufgrund mechanisch-atomistischer Vorstellungen über den Äther, welche das Resultat ergaben, daß das reflektierte Licht elliptisch polarisiert sein müsse bei jedem Einfallswinkel und zwar in der Weise, daß bei senkrechter Inzidenz die Phasendifferenz der beiden Hauptkomponenten Null ist, mit wachsendem Einfallswinkel größer wird, sodaß sie beim Brewsterschen Winkel, d. h. demjenigen Winkel, dessen Tangens gleich dem nach der Prismenmethode bestimmten Brechungsindex ist, den Wert $\frac{\lambda}{4}$ erreicht und bei streifender Inzidenz $\frac{\lambda}{2}$ geworden ist. Nicht lange danach gelang es in der Tat Jamin[7]) an vielen Substanzen die Elliptizität des reflektierten Lichtes nicht nur nachzuweisen, sondern auch den ungefähren Zusammenhang zwischen Phasenverschiebung und Einfallswinkel messend zu verfolgen. Jamin war der Ansicht, daß die Cauchysche Theorie durch seine Experimente in vorzüglicher Weise bestätigt sei. Die Greensche Theorie hingegen ergab von den Jaminschen Beobachtungen so starke Abweichungen, daß sie durch Beobachtungsfehler allein nicht zu erklären waren. Wenige Jahre nach den Jaminschen Untersuchungen wies indessen Herr Quincke[8]) aufgrund

---

1) Brewster, Phil. trans. 1815. p. 125.
2) Airy, Phil. Mag. (3) 1833. I. p. 25.
3) A. Seebeck, Pogg. Ann. Bd. 20. 1830, p. 35.
4) Cauchy, Comptes rendus. t. 7, 8; 1839.
t. 10; 1840.
t. 28; 1849.
5) A. Beer, Pogg. Ann. Bd. 91. p. 268 u. 467. 1854.
F. Eisenlohr, Pogg. Ann. Bd. 104. p. 346. 1858.
v. Ettingshausen, Pogg. Ann. Bd. 50. p. 409. 1840.
6) Green, Cambridge Phil. trans. p. I.
7) Jamin, Pogg. Ann. Ergbd. 3. 1853. p. 232 u. 269. Ann. d. chim. et d. phys. (3). t. 29. p. 263. 1850.
8) G. Quincke, Pogg. Ann. Bd. 128. p. 355. 1866.

eigner Versuche nach, daß auch die Cauchysche Formel für die Elliptizität des reflektierten Lichtes falsch ist. Es schien also notwendig zu sein, eine ganz neue Hypothese über die Art des Reflexionsvorganges einzuführen.

Nun hatte man bis dahin bei der theoretischen Behandlung des Reflexionsproblems stets angenommen, daß zwischen den beiden Medien eine mathematische Grenzfläche existiere. Aber bereits A. Seebeck[1]) hatte aufgrund seiner Messungen des Polarisationswinkels an hochbrechenden Substanzen, der, wie er fand, in der Regel abwich von dem Werte, den er nach dem Brewsterschen Gesetz, bezw. nach den Fresnelschen Formeln haben sollte, die Hypothese aufgestellt, daß die Oberfläche der von ihm untersuchten Gläser mit einer gegenüber der Wellenlänge sehr dünnen Schicht bedeckt sei, deren absoluter Brechungsindex zwischen dem des Glases und dem der Luft liegen müsse, und zwar glaubte er, daß diese Schicht im wesentlichen durch das Poliermittel gebildet werde. Damit war ein neuer Gesichtspunkt für die theoretische Behandlung gewonnen. Wohl der erste, der bei der Aufstellung einer Reflexionstheorie die Elliptizität des reflektierten Lichtes auf derartige Oberflächenschichten zurückführte, ist P. Zech[2]) gewesen. Er nahm, auf der von F. Neumann[3]) entwickelten Reflexionstheorie, die nach unserer heutigen Anschauungsweise im wesentlichen der Fresnelschen Theorie gleichzustellen ist, fußend an, daß zwischen den beiden Medien eine sehr dünne Schicht von konstantem Brechungsindex existiere, wobei der Wert dieses Brechungsindex zwischen den Werten der Indizes der beiden Medien liege, eine Annahme, die uns heute freilich gezwungen erscheint, die aber damals im Interesse der Durchführbarkeit der Rechnung lag. Trotzdem fand er eine gute Übereinstimmung mit den Jaminschen Experimenten. Noch im selben Jahre erschien eine andere Theorie, von L. Lorenz[4]) aufgestellt, die eine Oberflächenschicht von allgemeinerer Beschaffenheit als es die Zechsche war, voraussetzte. Diese Theorie nimmt unter den Reflexionstheorien insofern eine Sonderstellung ein, als sie nicht bestimmte Differentialgleichungen mit den dazu gehörigen Grenzbedingungen als Grundlage nimmt, wie sie z. B. die Elastizitätstheorie liefert, sondern von Formeln ausgeht, deren Richtigkeit durch das Experiment in gewissem Umfange bereits direkt bestätigt war, nämlich von den Fresnelschen Formeln. Lorenz führt eine Übergangsschicht zwischen den beiden isotropen, durchsichtigen Medien ein in der Weise, daß der Brechungsindex von dem Werte, den er in dem einen Medium hat, allmählich in den Wert übergeht, den er im zweiten hat. Indem er

[1]) A. Seebeck. Pogg. Ann. Bd. 20. 1830. p. 27.
[2]) P. Zech. Pogg. Ann. Bd. 109. p. 60. 1860.
[3]) F. Neumann. Pogg. Ann. Bd. 25. p. 418. 1832.
[4]) L. Lorenz. Pogg. Ann. Bd. 111. p. 460—473. 1860.
„ Bd. 114. p. 238. 1861.

diese Übergangsschicht, deren Dicke er als klein gegenüber der Wellenlänge voraussetzt, sich in sehr viele dünne Lamellen zerlegt denkt, an deren gegenseitigen Grenzflächen eine vielfache Brechung und Reflexion des einfallenden Strahls zustande kommt, gelingt es ihm, durch Integration einer Differentialgleichung zu Ausdrücken für die Phasenverschiebungen der beiden Komponenten zu kommen, von denen ich in einem späteren Abschnitt zeigen werde, daß sie in der Tat den Erscheinungen gerecht werden. Da Lorenz selber die Theorie nicht soweit geführt hat, daß seine Formeln unmittelbar mit dem Experiment vergleichbar wären, so fand diese Theorie damals wenig Beachtung; jedenfalls suchte man, von anderen Voraussetzungen ausgehend, unter Zuhilfenahme von Übergangsschichten andere brauchbare Reflexionsformeln herzuleiten. Im Jahre 1872 wurde von K. von der Mühll[1]) eine auf der Elastizitätstheorie basierende Theorie der Reflexion und Brechung an isotropen Medien gegeben, der im Jahre 1883 und den folgenden Jahren die mechanische Lichttheorie von Herrn W. Voigt[2]) folgte. In diesen beiden Theorien wird die Frage nach der Elliptizität des reflektierten Lichtes nicht näher diskutiert. Erst van Ryn van Alkemade[3]) verdanken wir eine eingehende theoretische Untersuchung dieser Frage im Jahre 1883, welcher unter Zugrundelegung der Maxwellschen Gleichungen und der aus der Maxwellschen Theorie folgenden Grenzbedingungen, wie sie für zwei isotrope, durchsichtige Medien mit ebener Grenzfläche gelten, unter der Annahme einer Übergangsschicht eine Formel für die Elliptizität des reflektierten Lichtes ableitete, welche mit dem Experiment in gutem Einklang war. In umfassender Weise ist die Frage nach der Elliptizität des reflektierten Lichtes bei dem Vorhandensein von Oberflächenschichten durch die Arbeiten von P. Drude[4]) im Jahre 1889 behandelt worden. Drude steht dabei auf dem Boden der mechanischen Lichttheorie von Voigt, die das Kirchhoffsche Prinzip anwendet, welches aussagt, daß „die an der Grenze geleistete Arbeit der auf den Äther wirkenden Kräfte verschwinden müsse."

Durch diese Arbeiten ist, wie man wohl sagen darf, das Problem, wie Oberflächenschichten an der Grenze zweier isotroper Medien auf die relative Phasenverschiebung zwischen den beiden Hauptkomponenten einwirken, gelöst worden. Für den Fall, daß die Schichtdicke sehr klein

---

[1]) K. von der Mühll. Math. Ann. Bd. 5. p. 471. 1872.

[2]) W. Voigt. Wied. Ann. Bd. 19. p. 873. 1883.
Bd. 21. p. 522. 1884.
Bd. 23. p. 493. 1884.
Bd. 24. p. 156. 1885.
Bd. 43. p. 410. 1891.

[3]) van Ryn van Alkemade. Wied. Ann. Bd. 20. p. 22. 1883.

[4]) P. Drude. Wied. Ann. Bd. 36. p. 865. 1889.
Bd. 43. p. 126. 1891.

gegenüber der Wellenlänge ist, sind Formeln angegeben worden, welche direkt mit dem Experiment vergleichbar sind. Inzwischen war auch auf experimenteller Seite eifrig an der Frage nach dem Einfluß der Oberflächenschichten auf die Reflexion gearbeitet worden. Im Jahre 1887 untersuchte W. Wernicke[1]) den Einfluß verschiedener Polituren, überhaupt verschiedener Behandlungsweise der Oberflächen. Seine Resultate enthalten nach meiner Auffassung keinen Widerspruch gegen die Drudesche Theorie. Er selbst freilich gelangte zu anderen Ansichten. Ferner stellte Drude[2]) experimentelle Untersuchungen an frischen Spaltflächen von Antimonglanz an, an denen er zeigte, daß dieselben sich allmählich mit einer Oberflächenschicht überzogen. An anderen Kristallen, insbesondere am Kalkspat, sowie an verschieden polierten Gläsern, sind später noch Untersuchungen von Herrn K. E. F. Schmidt[3]) gemacht worden, welche zu keinem in gewisser Hinsicht der Drudeschen Theorie und allen bisher bekannten Tatsachen widersprechenden Resultate führten. Indessen ist dieser Widerspruch, nämlich das gleichzeitige Auftreten von „positiver" und „negativer" Reflexion[4]) an ein und demselben Körper, auch heute noch nicht gelöst, da nach diesen Arbeiten, also nach 1894 über den Einfluß von Oberflächenschichten auf die Elliptizität des reflektierten Lichtes nicht mehr gearbeitet worden zu sein scheint. (Auf den Inhalt der zuletzt genannten Arbeiten komme ich p. 24 noch ausführlicher zu sprechen.) Zu erwähnen ist schließlich noch eine Arbeit von A. Cornu,[5]) welcher mittels einer photographischen Methode die Elliptizität reflektierter ultravioletter Strahlen bis 230 $\mu\mu$ untersuchte und zeigte, daß dieselben sich ganz analog den sichtbaren Strahlen verhalten.

§ 2. Totalreflexion.

Was hingegen die theoretischen und experimentellen Untersuchungen über die Totalreflexion angeht, so ist zunächst zu bemerken, daß dieselbe viel weniger eingehend als die gewöhnliche Reflexion behandelt worden ist. Die erste Theorie für die Elliptizität des reflektierten Lichtes

---

1) W. Wernicke. Wied. Ann. Bd. 30. p. 457. 1887.

2) P. Drude. Wied. Ann. Bd. 36. p. 532. 1889.

3) K. E. F. Schmidt. Wied. Ann. Bd. 51. p. 417. 1894.
„ „ Bd. 52. p. 75. 1894.
„ „ Bd. 53. p. 769. 1894.

4) Nach dem Vorgange von Jamin bezeichnet man als positive Reflexion diejenige in Luft, bei der die Differenz der Phasenverzögerungen der zur Einfallsebene parallel schwingenden und der senkrecht zu ihr schwingenden Komponenten, also $\delta_p - \delta_s$ positiv ist, wenn δ_p und δ_s die Phasenverzögerungen der beiden Komponenten gegenüber der einfallenden Welle sind. Negative Reflexion findet dann bei negativem $\delta_p - \delta_s$ statt.

5) A. Cornu, Comptes rendus, t. 108. 2. p. 917. 1889.

gab Fresnel[1]) im Jahre 1821, indem er gewisse imaginäre Ausdrücke in reelle Größen umdeutete. Die von Fresnel aufgestellten Formeln, insbesondere diejenige über die relative Phasenverschiebung der in den beiden Hauptazimuten schwingenden Komponenten, welche auch heute noch die einzige zu sein scheint, welche wir besitzen, wurden von Jamin[2]) und Quincke[3]) durch das Experiment in genügender Weise bestätigt. Ferner hat Quincke[4]) eingehend das Eindringen des Lichtes in das dünnere Medium bei der totalen Reflexion behandelt, Untersuchungen, welche durch Voigt[5]) auch eine theoretische Darstellung gefunden haben, und die nach der experimentellen Seite hin neuerdings von E. E. Hall[6]) wieder aufgenommen worden sind. Über den Einfluß von Oberflächenschichten auf die Elliptizität des total reflektierten Lichtes ist bisher nur theoretisch gearbeitet worden. Drude fand in den oben zitierten Arbeiten auf theoretischem Wege, daß der Einfluß von Oberflächenschichten auf die Totalreflexion sehr gering sein müsse. Die von Drude aufgestellte Formel hat bis jetzt keine experimentelle Prüfung erfahren, wie denn überhaupt seit 1866 sich niemand mehr eingehend mit der bei der Totalreflexion an isotropen Medien auftretenden Elliptizität experimentell beschäftigt zu haben scheint.

II. Die Experimente.

§ 3. Problemstellung.

Die vorliegende Arbeit stellt sich nun die folgenden Aufgaben:

1. Es soll möglichst exakt unter Anwendung homogenen Lichtes die Drehung der Polarisationsebene und die Phasendifferenz der beiden Hauptkomponenten gemessen werden und zwar bei festen, isotropen, durchsichtigen Substanzen von möglichst verschiedenem Brechungsindex:
   a. bei der gewöhnlichen Reflexion in Luft;
      insbesondere soll der Einfluß einer künstlichen Oberflächenschicht untersucht werden.
   b. unter Anwendung einer besonders geeigneten Meßmethode in der unmittelbaren Umgebung der Grenze der Totalreflexion,
      wiederum unter Berücksichtigung des Einflusses einer künstlichen Oberflächenschicht.
   c. im ganzen Winkelgebiete der Totalreflexion an sehr niedrig- sowie sehr hochbrechenden Substanzen, um etwaige Abweichungen von der Fresnelschen Formel für die Phasen-

[1]) Fresnel, Oeuvres, t. 1, p. 758, 781, 783, 784.
[2]) Jamin, Ann. d. chim. et d. phys. (3). t. 30.
[3]) Quincke, Pogg. Ann. Bd. 127. p. 199. 1866.
[4]) Quincke, Pogg. Ann. Bd. 127. p. 1. 1866.
[5]) W. Voigt, Gött. Nachr. (3.) p. 49. 1884.
[6]) E. E. Hall, Phys. Rev. 15. p. 73. 1902.

differenz, die nach dem einleitend Bemerkten bisher nur wenig der Prüfung unterzogen worden ist, möglichst sicher und genau zu konstatieren.

2. Es sollen die Quinckeschen Untersuchungen über das Eindringen des Lichtes in das dünnere Medium bei der Totalreflexion nach einer anderen Methode wieder aufgenommen werden.
3. Es soll eine Kritik und Fortführung der Lorenzschen Theorie gegeben werden.

§ 4. Versuchsanordnung.

Als Lichtquelle diente eine Lummersche Quecksilberlampe,[1]) welche, um zu vermeiden, daß sich Quecksilbertröpfchen an der vom Strahlengang durchsetzten Glaswand niederschlagen, von einer Heizspirale umgeben war. Es reichte aus, die Lampe mit 7 Amp. brennen zu lassen, zumal eine erheblich höhere Ampèrezahl die Intensität nicht sehr verstärkte. Diese Lampe wurde vor den Spalt eines großen Spektrometers[2]) folgender Konstruktion gestellt. Die wesentlichen Bestandteile dieses Spektrometers, welches, um möglichst exakte Messungen zu gestatten, in sehr großen Dimensionen gebaut wurde, sind das Kollimatorrohr, ein Wadsworthsches Prisma, der Polarisator, Prismentisch und Teilkreis, der Soleil-Babinetsche Kompensator, der Analysator und das Beobachtungsfernrohr.

Das Kollimatorrohr trägt einen meßbar verstellbaren Spalt mit symmetrischer Verstellung der beiden Spaltränder. Die Kollimatorlinse hat 50 cm Brennweite und 4 cm Durchmesser und ist aus den Steinheilschen Werkstätten hervorgegangen. Damit die aus dem Kollimator austretenden Strahlen mit Rücksicht auf eine von Herrn K. E. F. Schmidt[3]) gemachte Bemerkung möglichst parallel waren, wurde die Spaltöffnung meist in einer Flächengröße von etwa $^1/_4$ qcm gehalten, wobei der Spalt immer noch weit geöffnet war.

Das Wadsworthsche Prisma, welches die spektrale Zerlegung des Quecksilberlichtes besorgte, kann mittels Gestänge vom Platze des Beobachters aus gedreht werden, sodaß man bequem bei feststehendem Fernrohr mit verschiedenen Wellenlängen beobachten kann.

Der Polarisator, bis auf Bogenminuten einstellbar, befand sich auf einem besonderen Gestell vor dem Wadsworthschen Prisma.

Der Prismentischteilkreis kann mittels zweier um 180° abstehender Okularmikrometer, deren Beleuchtung durch kleine 2-Volt-Lampen besorgt wird, auf Bogensekunden abgelesen werden.

Auf dem um die Prismentischaxe drehbaren Arm, auf welchem das Fernrohr montiert ist, befindet sich, dem Prismentische zunächst gelegen,

---

[1]) O. Lummer, Zschr. f. Instrk. Bd. 21. p. 201. 1901.

[2]) Dasselbe wurde im Frühjahr 1906 von der Firma Schmidt & Haensch in Berlin geliefert.

[3]) K. E. F. Schmidt, Wied. Ann. Bd. 51. p. 436. 1894.

der Soleil-Babinetsche Kompensator, der mittels eines besonderen Halters aufgesetzt ist. Derselbe besteht aus zwei inbezug auf die Hauptaxen rechtwinklig zu einander orientierten Quarzkeilen, an deren einem noch eine planparallele Quarzplatte aufgekittet ist, um auch die Phasendifferenz Null hervorbringen zu können; er kann vermöge einer Führung unter jedem Winkel zur Horizontalen festgeklemmt werden. Die Drehung seiner Mikrometerschraube, an deren Ende sich eine Trommel zum Ablesen der Hundertel einer Ganghöhe befindet, muß ebenfalls durch ein Gestänge besorgt werden, da der Kompensator vom Beobachtungsplatze aus mit der Hand nicht erreichbar ist.

Der Analysator, welcher ebenfalls auf einem besonderen Unterbau sich zwischen Fernrohr und Kompensator befindet, hat einen Teilkreis, der mittels zweier um 180° verschiedener Okularmikrometer bis auf 3,6″ ablesbar ist, eine Genauigkeit, die für meine Versuche überflüssig, hingegen für später in Aussicht genommene andere Untersuchungen notwendig ist. Eine Drehung sowohl von Polarisator wie von Analysator um 180° brachte keine merkliche Verschiebung des Spaltbildes hervor. Auch das Aufsetzen des Kompensators beeinflußte nicht die Lage des Spaltbildes. Da fast stets in völliger Dunkelheit gearbeitet wurde und eine fortwährende gute Dunkeladaptation des Auges notwendig war, mußten Kompensator, Prismentischteilkreis und Analysatorteilkreis durch kleine 2-Volt-Lampen erleuchtet werden, die gut abgeblendet waren.

Das Fernrohr hat eine Objektivlinse von gleichen Eigenschaften wie die Kollimatorlinse. Für Messungen, welche innerhalb eines sehr kleinen Einfallswinkelgebietes gemacht werden sollen, kann ein Okularmikrometer mit Okularspalt an das Fernrohr angesetzt werden. Der Okularspalt hatte eine Breite von etwa 20″ und kann bis auf Bruchteile von Bogensekunden meßbar verschoben werden. Für die Beobachtungen an der Grenze der Totalreflexion bediente ich mich ausschließlich dieses Okularmikrometers, während alle übrigen Beobachtungen mit einem gewöhnlichen Okular geringer Vergrößerung gemacht wurden. Das Fernrohr konnte soweit verschoben werden, daß man bei Einfallswinkeln von zirka 23° bis 75° messen konnte. Eine direkte Gegenüberstellung des Fernrohrs und Polarisators war nicht möglich, da das Fernrohr mit seinem Arm seines Gewichtes wegen auf einer besonderen, inbezug auf die Prismentischaxe zentrierten Gleitschiene laufen mußte und diese aus technischen Gründen nicht soweit herumgeführt wurde, daß eine Gegenüberstellung des Fernrohrs möglich war.

Die ersten Versuche zeigten, daß die hellgrüne Quecksilberlinie $\lambda = 546\ \mu\mu$ weitaus am besten verwendbar war wegen ihrer Intensität und weil die noch in Betracht kommenden gelben Quecksilberlinien zu nahe bei einander lagen. Außerdem hat das grüne Licht den Vorteil, daß das Auge für dasselbe sehr empfindlich ist.

Das von mir benutzte Prismenmaterial war das folgende:

Prisma I. Ein Prisma aus amorphem SiO_2, dreiseitig geschliffen, jedoch so, daß der Grenzstrahl zwischen gewöhnlicher und totaler Reflexion die Kathetenflächen senkrecht durchsetzt. $n = 1{,}4605$.[1]) Hypotenusenfläche 3×3 qcm groß. Das Prisma wurde mit Schmirgel geschliffen und mit Pariser Rot poliert. Auf die experimentelle Untersuchung dieses Prismas wurde besonderer Wert gelegt, einmal, weil bei Quarzglas überhaupt noch nicht die hier in Frage kommenden Messungen angestellt worden sind, sodann aber, weil Quarzglas hinsichtlich seines allgemeinen optischen Verhaltens von den Gläsern stark abweicht.

Prisma II. Ein rechtwinklig geschliffenes Glasprisma. $n = 1{,}5150$. Hypotenusenfläche 3×4 qcm groß.

Prisma III. Ein rechtwinklig geschliffenes Glasprisma von Zeiß, $n = 1{,}5188$. Hypotenusenfläche 4×5 qcm groß.

Prisma IV. Ein schweres Silikat-Flintglasprisma (Bestandteile: 79 % PbO, 21 % SiO_2) von Zeiß. Dasselbe wurde mit Schmirgel geschliffen und mit Pariser Rot poliert. Für die Kathetenflächen gilt dieselbe Eigentümlichkeit wie für Prisma I. Hypotenusenfläche 4×5 qcm. $n = 1{,}9166$.

Prisma V. Ein Zinkblendeprisma, leider nicht ganz durchsichtig. Die Kathetenflächen waren analog denen bei Prisma I geschliffen. Die Flächen, welche von Voigt und Hochgesang in Göttingen geschliffen und poliert wurden, waren nicht sehr glatt, da das Material äußerst schwer zu bearbeiten war. $n = 2{,}3902$. Hypotenusenfläche $= 2\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{2}$ qcm.

§ 5. Justierung und Meßmethode.

a. Justierung.

Die Justierung von Kollimator, Prismentisch und Fernrohr geschah in der üblichen Weise. Für die Justierung der Nikols und des Kompensators mußte eine von der gewöhnlichen etwas abweichende Methode angewendet werden, da es, wie oben hervorgehoben, nicht möglich war, die Fernrohraxe parallel dem aus dem Polarisator austretenden direkten Strahlengang zu stellen. Es wurde zunächst ein Prisma von bekanntem Brechungsindex, welches gut justiert war, auf den Polarisationswinkel als Einfallswinkel eingestellt. Hierauf wurde mittels Fernrohr, ohne vorgeschalteten Analysator, auf das Minimum der Helligkeit eingestellt. Nachdem so der Polarisator justiert war, wurde der Analysator eingesetzt, der Polarisator um 90^0 gedreht und der Analysator ebenfalls auf das Minimum der Helligkeit eingestellt. Jetzt wurde der Kompensator aufgesetzt und auf „zirkular" gestellt, was durch Vormessungen ungefähr festgestellt worden war, und mit der Hand so orientiert, daß wiederum geringste Helligkeit eintrat. Eine besondere Messung zeigte, daß der Kompensator einen Orientierungs-

1) Alle Brechungsindizes beziehen sich natürlich auf $\lambda = 546$ μμ.

fehler von $0{,}6^0$ hatte. Um den Kompensator exakt auszuwerten, wurde er bei der zuletzt erwähnten Polarisatorstellung auf das Azimut 45^0 gegen die Einfallsebene gestellt. Die Nullage ergab sich zu 56,456; einer Phasendifferenz $\Delta = \delta_p - \delta_s$ der beiden Hauptkomponenten des in den Kompensator einfallenden Lichtes von $+\frac{\lambda}{2}$ entsprach 40,919, einer Differenz von $-\frac{\lambda}{2}$ entsprach 71,999, Zahlen, deren Richtigkeit bis auf 0,05 % der Wellenlänge ich glaube verbürgen zu können. Dabei sind δ_p und δ_s die Phasenverzögerungen gegenüber dem einfallenden Strahl der parallel und senkrecht zur Einfallsebene schwingenden Komponente. Im folgenden werden wir stets nur von Phasenverzögerungen reden. Die Differenzen, welche einer halben Wellenlänge entsprechen, sind 15,537 und 15,543; es zeigt sich also eine Übereinstimmung in den beiden Werten, die weit besser ist als bei dem von Drude[1]) benützten Kompensator, der dieselbe Konstruktion wie der meinige hatte, und die wohl als ein Beweis für die hervorragende Güte des von mir benützten Instrumentes anzusehen ist. Als Ausgangslagen wurden daher die Werte

40,92 56,46 72,00

angenommen, sodaß die Verzögerung Δ zwischen den einfallenden Hauptkomponenten gegeben ist durch

$$\Delta = \frac{\pi}{15{,}54}\,(56{,}46 - B), \qquad (1)$$

wenn B die vom Kompensator angezeigte Zahl ist. Nach R. Hennig[2]) übt nun ein nicht völlig genau orientierter Kompensator einen Einfluß auf die zu messende Phasenverschiebung aus, der in der Nähe des Polarisationswinkels sehr bedeutend werden kann. Ist nämlich $\frac{\alpha}{2\pi}$ die gemessene, $\frac{x}{2\pi}$ die zu findende Phasendifferenz, ist ferner ε der Orientierungsfehler, d. h. der Winkel, den die Axe einer Quarzplatte im Kompensator gegen die Einfallsebene bildet, sind a_1 und a_2 die parallel und senkrecht zur Einfallsebene schwingenden Komponenten des reflektierten Strahls, so gilt nach Hennig bei kleinem Orientierungsfehler:

$$\sin(x - \alpha) = \sin 2\varepsilon\,\frac{a_2^2 - a_1^2}{2}\,\sin\alpha \qquad (2)$$

und

$$\frac{a_2}{a_1} - \rho = \sin\varepsilon\,.\,(\rho^2 + 1)\,(1 - \cos 2\pi x), \qquad (3)$$

wenn ρ das direkt gemessene Verhältnis der senkrecht und parallel zur Einfallsebene schwingenden Komponente ist. Gibt man dem Polarisator zwei zur Einfallsebene symmetrische Stellungen, so kehrt sich in den

[1]) P. Drude Wied. Ann. Bd. 34. p. 493. 1888.
[2]) R. Hennig, Gött. Nachr. Bd. 3. p. 374. 1887.

Formeln (2) und (3) nur das Vorzeichen von ε um und damit auch die Vorzeichen von $x-\alpha$ und $\frac{a_2}{a_1} - \rho$. Die bei beiden Einstellungen des Polarisators gemachten Fehler sind also entgegengesetzt gleich, sodaß der Fehler ausgeschaltet wird, wenn bei beiden symmetrisch zur Einfallsebene liegenden Einstellungen des Polarisators aus den Analysator- und Kompensatoreinstellungen das arithmetische Mittel genommen wird. Sämtliche Beobachtungen sind in dieser Weise angestellt worden. Daß der Wert $\varepsilon = 0{,}6^0$ noch nicht den durch die Hennigschen Formeln geforderten Betrag überschreitet, ist durch Untersuchungen von Drude[1]) sichergestellt worden.

b. Meßmethode.

Die bei der gewöhnlichen und totalen Reflexion angewendete Meßmethode gestaltete sich daher folgendermaßen: Zunächst wurde das beobachtende Auge gut dunkeladaptiert, da die Auslöschung der Nikols bei dem homogenen Lichte eine sehr vollständige war. Sodann wurden, indem der Polarisator das Azimut 5^0 gegen die Einfallsebene bei der gewöhnlichen Reflexion, 45^0 bei der Totalreflexion hatte, bei verschiedenen Einfallswinkeln, meist über 20, in der bekannten Weise Kompensator und Analysator auf geringste Helligkeit eingestellt, worauf bei denselben Einfallswinkeln die entsprechenden Einstellungen für das zur Einfallsebene symmetrische Polarisationsazimut gemacht wurden. Für jeden einzelnen Einfallswinkel wurden 4 Kompensator- und zwei Analysatoreinstellungen gemacht. Etwas anders gestaltete sich die Methode an der Grenze der Totalreflexion, also bei dem unter 1b aufgestellten Versuchsprogramm. Hier wurde auf die Totalreflexionsgrenze, die sich bei geeigneter Nikolstellung durch einen plötzlichen Intensitätsabfall kundgab, das Fernrohr eingestellt und festgeklemmt. Das Okularmikrometer mit meßbar verstellbarem Spalt wurde aufgesetzt und nunmehr immer der vom Okularspalt freigelassene Teil des Kollimatorspaltes auf das Minimum von Helligkeit gebracht. Hier wurden für jeden Einfallswinkel 6 Analysator- und 6 Kompensatoreinstellungen gemacht. Obwohl für letztere in der Nähe des Polarisationswinkels das Einfallsazimut 5^0 bei Prisma I und II ungünstig groß war, so wurde dasselbe doch auch für diese beiden Prismen beibehalten, um die Resultate mit denen bei den übrigen Prismen leichter vergleichen zu können.

§ 6. Gewöhnliche Reflexion.

Ich wende mich nun zur ersten Gruppe meiner Untersuchungen, welche die gewöhnliche Reflexion in Luft an den Prismen I, II, IV und V betrifft. Die Oberflächen dieser Prismen, mit Ausnahme von II, welche längstens zwei Monate vor ihrer Benützung geschliffen worden waren (II war ein

[1]) P. Drude, Wied. Ann. Bd. 34. p. 493. 1888.

etwas älteres Prisma), wurden mit einem weichen Lederlappen[1]) abgewischt und dann sofort zur Messung verwendet. Prisma II wurde indessen mit Säuren, Alkohol und Benzin gereinigt. Dieser Zustand der Oberflächen möge im folgenden kurz als „natürlicher" Zustand bezeichnet werden. Der Polarisator hatte stets das Azimut 5^0 gegen die Einfallsebene. Die Resultate dieser Messungen sind in folgender Tabelle dargestellt:

A.

I			II			IV			V		
$\delta_2 = 5{,}0$			$\delta_2 = 7{,}0$			$\delta_2 = 3{,}0$			$\delta_2 = 5{,}1$		
J	A	B	J	A	B	J	A	B	J	A	B
$22^0 22{,}7'$	6,3	56,42	$22^0 51'$	6,3	56,35	$23^0\ 8{,}7'$	6,0	56,39	$23^0 15'$	5,7	56,16
$23^0 22{,}7'$	6,3	56 50	$24^0 41'$	6,5	56 41	$24^0 28{,}7'$	6,1	56 20	$26^0 15'$	6,3	56 10
$28^0 22{,}7'$	7,4	56 50	$26^0 41'$	6,8	56 69	$25^0 28{,}7'$	6,2	56 31	$31^0 15'$	6,8	56 12
$31^0 22{,}7'$	8,1	56 60	$28^0 41'$	7,1	56 54	$26^0 28{,}7'$	6,3	56 24	$36^0 15'$	7,4	56 10
$35^0 22{,}7'$	9,5	56 59	$31^0 41'$	7,8	56 39	$29^0 28{,}7'$	6,8	56 14	$41^0 15'$	8,4	55 97
$41^0 22{,}7'$	12,9	56 55	$35^0 41'$	9,1	56 50	$32^0 28{,}7'$	7,4	56 11	$46^0 15'$	10,5	55 88
$44^0 22{,}7'$	15,7	56 37	$39^0 41'$	11,2	56 31	$35^0 28{,}7'$	7,9	56 27	$51^0 15'$	12,8	55 85
$46^0 22{,}7'$	19,1	56 48	$44^0 41'$	15,4	56 47	$39^0 28{,}7'$	9,0	55 95	$56^0 15'$	18,1	55 66
$48^0 22{,}7'$	24,1	56 50	$46^0 41'$	18,2	56 57	$44^0 28{,}7'$	11,3	55 84	$58^0 15'$	21,4	55 48
$50^0 22{,}7'$	31,1	56 51	$49^0 41'$	25,7	56 27	$45^0 28{,}7'$	11,8	55 81	$60^0 15'$	26,3	55 22
$52^0 22{,}7'$	44,3	56 54	$52^0 41'$	40,0	56 18	$46^0 28{,}7'$	12,4	55 77	$62^0 15'$	34,3	54 57
$53^0 22{,}7'$	55,3	56 51	$54^0 41'$	59,3	55 84	$47^0 28{,}7'$	13,3	55 65	$63^0 15'$	40,1	54 03
$53^0 52{,}7'$	61,2	56 51	$55^0 41'$	74,2	55 28	$49^0 28{,}7'$	15,1	55 47	$64^0 15'$	46,7	53 27
$54^0 12{,}7'$	66,3	56 54	$55^0 51'$	76,8	55 02	$51^0 28{,}7'$	17,5	55 38	$65^0 15'$	55,4	51 98
$54^0 52{,}7'$	76,6	56 59	$56^0\ 1'$	79,6	54 66	$53^0 28{,}7'$	20,8	55 17	$66^0 15'$	60,3	49 57
$55^0 22{,}7'$	85,8	56 39	$56^0 11'$	82,4	54 11	$55^0 28{,}7'$	25,4	54 70	$66^0 45'$	61,3	48 23
$55^0 32{,}7'$	88,5	+	$56^0 21'$	84,8	52 84	$57^0 28{,}7'$	32,6	54 16	$67^0 15'$	60,5	46 73
$55^0 42{,}7'$	88,3	+	$56^0 31'$	85,4	49 95	$59^0 28{,}7'$	43,7	52 92	$67^0 45'$	56,5	45 58
$55^0 52{,}7'$	85,8	40 60	$56^0 36'$	86,1	47 94	$60^0 28{,}7'$	49,6	51 86	$68^0 15'$	43,4	43 52
$56^0\ 2{,}7'$	82,6	40 91	$56^0 41'$	85,7	46 67	$61^0 28{,}7'$	53,8	50 22	$71^0 15'$	26,3	42 21
$56^0 22{,}7'$	77,0	40 96	$56^0 51'$	83,7	44 60	$61^0 58{,}7'$	55,0	48 94	$75^0 15'$	15,5	41 59
$58^0 22{,}7'$	49,1	40 50	$57^0 11'$	78,6	43 08	$62^0 28{,}7'$	54,3	47 73			
$63^0 22{,}7'$	22,5	41 02	$57^0 41'$	70,9	41 88	$63^0 28{,}7'$	50,6	45 87			
$68^0 22{,}7'$	14,2	41 05	$58^0 41'$	56,9	41 47	$64^0 28{,}7'$	43,9	44 61			
$71^0 22{,}7'$	11,1	41 05	$63^0 41'$	24,5	41 23	$65^0 28{,}7'$	37,6	43 79			
$73^0 22{,}7'$	10,3	41 02	$69^0 41'$	13,7	41 08	$67^0 28{,}7'$	28,0	42 72			
						$70^0 28{,}7'$	19,7	42 11			
						$74^0 28{,}7'$	13,6	41 70			

[1]) Nach Drude ist Leder reinlicher als Leinwand. Wied. Ann. Bd. 36. p. 541. 1889.

Dabei sind I, II, IV und V die betreffenden Prismen, J ist der Einfallswinkel, A das Azimut der Schwingungsebene des reflektierten Strahles und B die Phasendifferenz $\delta_p - \delta_s$ der beiden Komponenten des reflektierten Strahls, in Teilen des Kompensators angegeben. Nach der Formel (1) ist sie in Teilen von π ausdrückbar. Ferner bedeutet δ_2 das Mittel des mittleren Beobachtungsfehlers des Einzelresultats, genommen von allen mittleren Beobachtungsfehlern einer Beobachtungsreihe und zwar bezogen auf die Kompensatoreinstellung, ausgedrückt in Trommelteilen, sodaß von dem Fehler meist nur die letzte Stelle der angegebenen Kompensatorzahlen alteriert wird. Diese Größe kann nur ungefähr über die gemachten Fehler orientieren, weil die Genauigkeit des Kompensators bei sehr kleinen, sehr großen und bei in der Nähe des Polarisationswinkels liegenden Einfallswinkeln eine viel geringere ist als bei den übrigen Einfallswinkeln. Als Repräsentant der dieser Tabelle entsprechenden Kurven sind die dem Prisma IV entsprechenden in Fig. 1 dargestellt, woselbst es die ausgezogenen Linien sind. (Die beobachteten Werte in die Kurven-

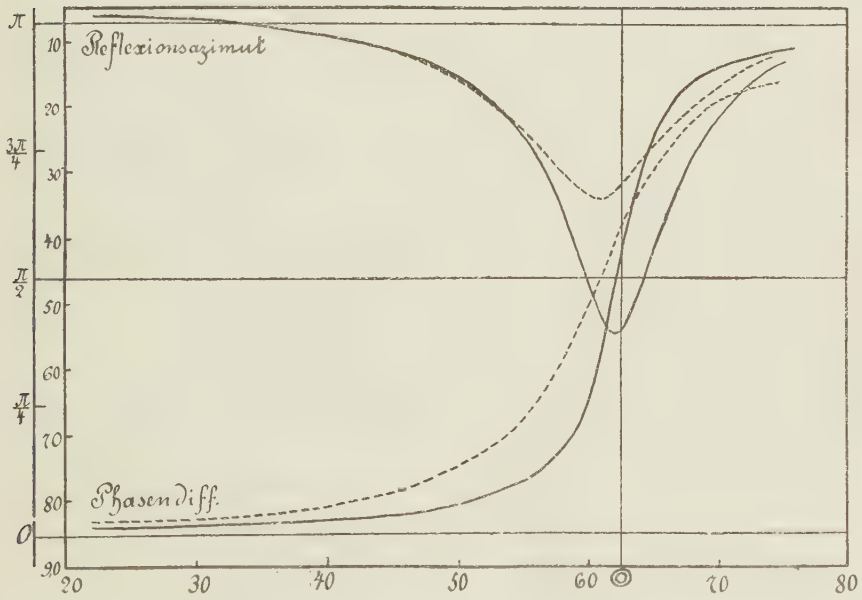


Fig. 1. Prisma IV. Gewöhnl. Reflexion

⊙ Brewsters Winkel

tafeln einzutragen erwies sich als überflüssig, da dieselben nur in wenigen Fällen von der gezeichneten Kurve abweichen. Nur in Fig. 2 sind bei der Wichtigkeit der Kurve die Beobachtungen eingetragen.) Die am unteren Rande stehenden Zahlen sind die Einfallswinkel, die links stehenden

Zahlen geben in Graden, von der Einfallsebene aus gerechnet, die Lage der Schwingungsebene des reflektierten Lichtes an und die durch einen Vertikalstrich davon getrennten Zahlen geben die Phasendifferenz in Teilen von π an. Bei Prisma I ist nicht festzustellen, ob es sich um positive oder negative Reflexion handelt. Bei Prisma I und II fallen Brewsters Winkel, Haupteinfallswinkel (Phasendifferenz gleich $\frac{\lambda}{4}$) und Polarisationswinkel zusammen. Bei Prisma IV hingegen fallen zwar Haupteinfallswinkel und Polarisationswinkel zusammen, hingegen ist der Brewstersche Winkel um etwa 25′ größer als jene beiden. Bei Prisma V liegen die Verhältnisse entsprechend, nur daß jener Unterschied größer, beinahe 40′ ist. Das maximale Azimut der Schwingungsebene des reflektierten Strahls nimmt nicht immer mit größeren Brechungsindizes ab, da es $88^0{,}6$, $86^0{,}1$, $55^0{,}0$ und $60^0{,}3$ beträgt, also bei der Zinkblende größer ist als beim Glase vom Brechungsindex 1,9. Ob bei kleinen Einfallswinkeln wirklich negative Reflexion auftritt, wie K. E. F. Schmidt[1]) sie konstatiert hat, kann ich bei der Unsicherheit der Kompensatoreinstellung in jenem Einfallswinkelgebiete nicht entscheiden. Mit höherem Brechungsindex zeigen alle Kurven eine Abflachung ihrer Buckel, d. h. um mich einer von Schmidt[2]) eingeführten Definition zu bedienen, das Elliptizitätsgebiet wächst mit dem Brechungsindex.

Um jetzt den Einfluß einer künstlichen Oberflächenschicht auf den Verlauf der eben besprochenen Kurven kennen zu lernen, wurde käufliches Paraffin, das ungefähr den Brechungsindex 1,44 hat, auf einen Lederlappen zerstückelt aufgetragen und die Hypotenusenfläche des Prismas kräftig damit eingerieben, sodaß eine verhältnismäßig dicke, nicht sehr gleichmäßige Schicht auf der Prismenoberfläche sich befand. Die Dicke dieser Schicht wurde mittels Newto scher Ringe zu durchschnittlich 2—3 μ bestimmt. Untersucht wurden wiederum die Prismen I, II, IV und V. Die Resultate sind in der folgenden Tabelle (B) niedergelegt, welche genau wie die Tabelle A eingerichtet ist.

---

[1]) K. E. F. Schmidt, Wied. Ann. Bd. 51. p. 434. 1894.

[2]) K. E. F. Schmidt, Wied. Ann. Bd. 51. p. 418. 1894.

B.

I			II			IV			V		
$\delta_2 = 6{,}1$			$\delta_2 = 4{,}0$			$\delta_2 = 5{,}0$			$\delta_2 = 25{,}0$		
J	A	B	J	A	B	J	A	B	J	A	B
23° 51,3′	6,5	56,45	22° 50,7′	6,1	56,30	22° 53′	6,0	56,15	24° 11′	45,0	56,07
27° 51,3′	7,3	56 59	24° 53,7′	6,9	56 38	24° 55′	6,2	55 92	28° 11′	42,7	56 22
32° 51,3′	8,6	56 47	28° 53,7′	7,2	56 56	26° 55′	6,6	56 12	30° 11′	41.5	55 59
38° 51,3′	11,3	56 54	33° 53,7′	8,6	56 22	28° 55′	6,7	56 10	33° 11′	38,0	54 99
43° 51,3′	15,7	56 32	38° 53,7′	10,9	56 34	33° 55′	7,6	55 92	35° 11′	42,1	53 48
47° 51,3′	23,2	56 20	43° 53,7′	14,6	56 38	38° 55′	9,1	55 93	40° 11′	54,5	52 22
50° 51,3′	35,0	55 78	48° 53,7′	23,2	56 19	43° 55′	11,4	55 30	45° 11′	59,8	46 85
52° 51,3′	51,8	55 54	51° 53,7′	35,5	55 97	48° 55′	14,9	54 63	50° 11′	61,9	45 31
53° 51,3′	63,1	54 66	52° 53,7′	42,5	55 76	51° 55′	18,4	54 07	55° 11′	64,6	43 85
54° 51,3′	77,7	52 14	53° 53,7′	51,3	55 45	54° 55′	23,9	53 03	60° 11′	61,2	42 59
55° 11,3′	79,6	50 08	54° 53,7′	63,4	54 88	56° 55′	27,8	52 02	65° 11′	59,1	42 03
55° 21,3′	80,9	48 70	55° 23,7′	70,0	54 38	57° 55′	30,1	51 37	70° 11′	56,5	41 62
55° 31,3′	79,6	46 78	55° 53,7′	78,2	53 15	58° 55′	31,7	50 53	75° 11′	54,6	41 42
55° 41,3′	78,4	45 63	56° 3,7′	79,0	51 93	59° 55′	33,3	49 53			
55° 51,3′	76,6	44 70	56° 13,7′	81,7	50 82	60° 25′	33,7	49 05			
56° 21,3′	69,4	43 52	56° 23,7′	81,1	48 96	60° 55′	34,4	48 65			
57° 51,3′	51,1	42 16	56° 33,7′	81,6	46 48	61° 25′	33,8	48 25			
60° 51,3′	29,6	41 40	56° 43,7′	80,2	45 95	61° 55′	33,0	47 54			
65° 51,3′	17,1	41 16	56° 53,7′	78,7	44 70	62° 25′	32,7	47 23			
75° 51.3′	9,1	41 36	57° 23,7′	71,5	43 41	62° 55′	30,8	46 68			
			57° 53,7′	62,9	42 78	63° 55′	29,7	45 83			
			58° 53,7′	52,4	41 88	64° 55′	26,4	45 22			
			60° 53,7′	35,3	41 63	66° 55′	22,3	44 30			
			64° 53,7′	20,8	41 21	69° 55′	17,0	43 26			
			69° 53,7′	13,7	41 20	73° 55′	12,5	42 68			
			73° 53,7′	10,3	41 43						

Bei den drei ersten Prismen war das Polarisatorazimut 5°, indessen beim Prisma V mußte, um einigermaßen genaue Kompensatoreinstellungen zu erhalten, das Einfallsazimut auf 45° erhöht werden. Es zeigte sich nämlich die eigentümliche Erscheinung, daß das Auftragen der Paraffinschicht bei den Prismen I, II und IV die Genauigkeit der Einstellung nur unwesentlich veränderte, hingegen bei dem Prisma V infolge erheblicher Diffusität des Lichtes sehr merklich herabsetzte, wie dies auch in dem angegebenen Fehler δ_2 zum Ausdruck kommt. Es betrifft dies nicht nur die Kompensator-, sondern auch die Analysatoreinstellung. Als Repräsentant der der Tab. B entsprechenden Kurven wurden wiederum die dem Prisma IV entsprechenden Kurven gewählt, welche in Fig. 1 gestrichelt eingetragen sind. Der allgemeine Charakter der Änderungen gegenüber der Tabelle A besteht darin, daß alle gestrichelten Kurven sich mehr den für die Metallreflexion geltenden Kurven annähern als die entsprechenden ausgezogenen. Es sind

also, bezogen auf denselben Einfallswinkel, die Phasendifferenzen vor dem Haupteinfallswinkel größer, hinter demselben kleiner geworden, wenn man, wie hier immer geschieht, für senkrechte Inzidenz die Phasendifferenz Null festsetzt.

Im Besonderen zeigt sich:

1. Das maximale Azimut der Schwingungsebene, das jetzt bezüglich $80{,}5^0$, $82{,}3^0$, $34{,}4^0$ und $9{,}5^0$ beträgt, hat bei allen Prismen abgenommen. Man wird sagen können, daß seine Abnahme um so größer geworden ist, je größer die Differenz zwischen den Brechungsexponenten des betreffenden Prismas und der Paraffinschicht ist.
2. Der Polarisationswinkel ist überall kleiner geworden, nämlich um etwa $17'$, $12'$, $90'$, 11^0 vom Brewsterschen Winkel abweichend. Auch hier wird man sagen dürfen, daß, je größer die obige Differenz ist, desto größer die Abweichung ist.
3. Der Haupteinfallswinkel ist auch überall kleiner geworden und zwar stimmt derselbe mit dem veränderten Polarisationswinkel überein, ausgenommen beim Zinkblendeprisma, wo der Haupteinfallswinkel um zirka 24^0 vom Brewsterschen Winkel abweicht.

Da Paraffin eine niedrig brechende Substanz ist, sollte eine zweite Versuchsserie mit einer hochbrechenden Substanz angestellt werden, um eventuell positive in negative Reflexion zu verwandeln, und so die von Voigt[1]) und Drude gegebene Erklärung der negativen Reflexion durch das Experiment direkt zu bestätigen. Es wurde α-Monobromnaphtalin mit dem Brechungsindex 1,66 gewählt. Allein wegen des Verdunstens der aufgetragenen Bromnaphtalinschicht können aus den hierbei angestellten Messungen keine Schlüsse gezogen werden.

§ 7. Grenzgebiet der Totalreflexion.

Die Veranlassung zu der Untersuchung des dem Grenzwinkel der Totalreflexion unmittelbar benachbarten Einfallswinkelgebietes gab eine von Herrn Lummer beobachtete Erscheinung, die sich vornehmlich an hoch brechenden Gläsern zeigt. Läßt man nämlich streng homogenes Licht ungefähr vom Azimut 45^0 so auf eine Prismenfläche auffallen, daß es unter dem Grenzwinkel der totalen Reflexion zurückgeworfen wird, so zeigt sich bei nahe gekreuztem Analysator und Polarisator, indem der Kompensator auf Null eingestellt ist, eine das Gebiet der gewöhnlichen von dem der totalen Reflexion trennende helle Linie, die sich durch das von mir benützte stark auflösende Spektrometer in ein mäßig, aber immerhin deutlich sich von der dunkleren Umgebung abhebendes helles Band verwandelte. Da dieses Band sehr schmal, zirka $^1/_2{}'$ war, mußte, wie schon erwähnt, statt des gewöhnlichen Okulars ein Okularmikrometer mit meßbar verschiebbarem

[1]) W. Voigt, Wied. Ann. Bd. 23. p. 122. 1884.
„ „ Bd. 31. p. 326. 1887.
„ „ Bd. 32. p. 526. 1887.

Spalt verwendet werden, welcher infolge seiner geringen Breite die Genauigkeit besonders der Analysatoreinstellung herabsetzte. Das Einfallsazimut war 45°. Gemessen ist wiederum Phasendifferenz und Reflexionsazimut. Die Resultate sind bei der Schwierigkeit dieser Messungen teilweise mit großen Fehlern behaftet. Prisma V konnte wegen der mangelhaften Durchsichtigkeit für diese Versuche keine Verwendung finden. Als Nullpunkt der Einfallswinkel ist der nach der Seite der gewöhnlichen Reflexion hin liegende Rand des hellen Bandes gewählt worden, der, soweit feststellbar, zusammenfiel mit dem durch den Brechungsindex gegebenen Grenzwinkel, sodaß also die Grenze der Totalreflexion als definiert angesehen werden kann durch den mit der Prismenmethode bestimmten Brechungsindex. Dabei zeigt sich, daß die Phasendifferenz $-\pi$ nicht beim Grenzwinkel der totalen Reflexion, sondern erst im total reflektierenden Gebiet eintritt, und zwar ist sie, im großen und ganzen wenigstens, um so weiter vom Grenzwinkel abgelegen, je höher der Brechungsindex des Glases gegen Luft ist. Eine weitere Hinausschiebung der Phasendifferenz $-\pi$ wird durch die aufgelegte Paraffinschicht verursacht, sodaß z. B. beim Prisma IV die Phasendifferenz $-\pi$ ohne Paraffinschicht beim Winkel 5′ eintrat, mit Paraffinschicht indessen ungefähr beim Winkel 20′, vom Grenzwinkel der totalen Reflexion an gerechnet. Die hierher gehörige Tabelle (C) ist im folgenden mitgeteilt. Dabei bedeutet δ_1 den Analysatoreinstellungsfehler, ausgedrückt in Graden, der auf dieselbe Weise wie der Kompensatoreinstellungsfehler berechnet wurde.

C.

A			I			II			IV		
$\delta_1 = 0{,}2^0$ $\delta_2 = 1{,}2$			$\delta_1 = 0{,}3^0$ $\delta_2 = 3{,}0$			$\delta_1 = 0{,}2^0$ $\delta_2 = 2{,}5$			$\delta_1 = 0{,}2^0$ $\delta_2 = 2{,}5$		
Natürlicher Zustand.											
J	A	B	J	A	B	J	A	B	J	A	B
″	0		″	0		″	0		″	0	
−109	46,4	71,80	− 76	47,2	71,73	− 84	47,9	71,76	− 76	48,5	70,79
− 87	46,1	71 80	− 49	46,6	71 71	− 54	47,3	71 80	− 55	48,4	70 81
− 64	45,7	71 82	− 22	45,2	71 68	− 44	47,1	71 79	− 35	47,6	70 80
− 42	45,4	71 82	− 8	45,1	71 69	− 30	47,0	71 80	− 24	47,1	70 81
− 20	44,9	71 82	− 1	44,8	71 76	− 17	47,0	71 82	− 14	46,6	70 81
− 8	44,8	71 83	+ 5	45,0	71 78	− 4	46,6	71 82	− 9	46,0	70 81
+ 2	43,8	71 85	+ 19	44,8	71 86	+ 3	46,5	71 83	+ 2	46,1	70 85
+ 14	44,0	71 97	+ 33	45,0	71 77	+ 10	46,2	71 83	+ 7	45,9	70 91
+ 25	44,1	71 98				+ 22	45,7	71 84	+ 12	45,6	70 93
+ 48	43,8	72 09				+ 36	45,5	71 94	+ 22	45,2	71 05
+ 70	43,6	72 15				+ 50	45,6	72 00	+ 43	45,2	71 19
+ 92	43,5	72 23				+ 70	45,6	72 11	+ 64	45,8	71 27
						+130	45,7	72 25	+106	45,4	71 48
									+142	45,3	71 55
									+272	45,1	71 94

Mit Paraffin belegt.

$\delta_1 = 0{,}3^0$ $\delta_2 = 2{,}5$			$\delta_1 = 0{,}1^0$ $\delta_2 = 1{,}5$			$\delta_1 = 0{,}1^0$ $\delta_2 = 1{,}5$		
J	A	B	J	A	B	J	A	B
″	0		″	0		″	0	
— 99	44,2	70,93	— 94	46,8	71,78	—120	49,8	69,67
— 44	43,9	71 00	— 66	46,6	71 77	— 78	49,5	69 70
— 16	43,5	71 03	— 40	46,2	71 75	— 36	48,4	69 69
— 3	42,8	70 99	— 14	45,4	71 80	— 16	47,4	69 71
+ 10	42,8	71 14	0	44,7	71 89	— 5	46,1	69 78
+ 36	42,7	71 31	+ 14	44,8	71 96	+ 5	46,7	69 90
+ 64	42,3	71 25	+ 26	44,7	72 07	+ 16	46,3	70 00
+117	42,1	71 37	+ 54	44,8	72 14	+ 47	46,3	70 16
+172	42,3	71 45				+ 88	46,3	70 31
						+146	46,2	70 53
						+187	46,2	70 62
						+250	46,3	70 74
						+629	46,1	71 28
						+712	46,1	71 39

Die negativen Einfallswinkel gehören der gewöhnlichen Reflexion in Glas an.

§ 8. Das Fresnelsche Winkelgebiet der Totalreflexion.

Auf Totalreflexion wurde Prisma I und Prisma IV untersucht. Die Einfallswinkel konnten nur etwas über 20^0 hinaus, vom Grenzwinkel der totalen Reflexion an gerechnet, gewählt werden, da das Fernrohr, wie oben dargelegt, nur innerhalb eines beschränkten Winkelgebietes drehbar war. Die Oberflächen befanden sich in gereinigtem Zustande. Die für das Quarzglas geltende Kompensatorkurve ist in Fig. 2 eingezeichnet,

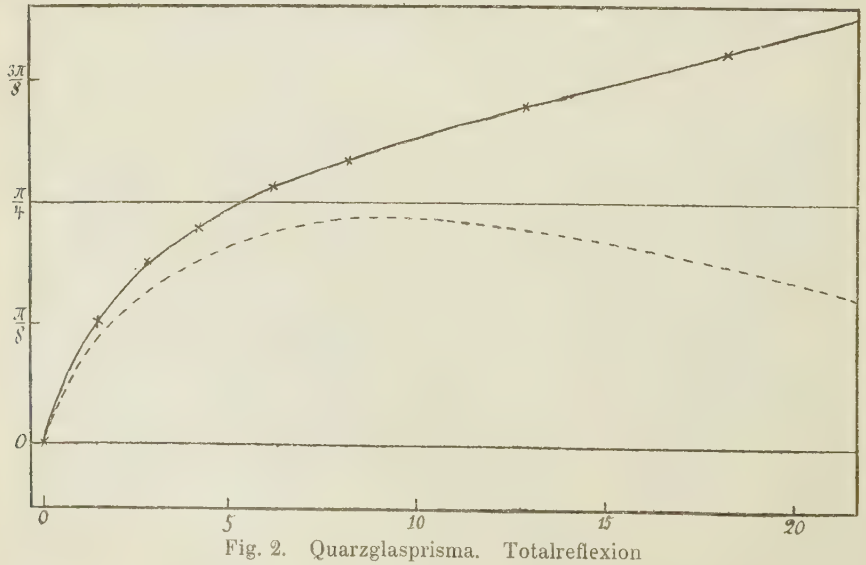


Fig. 2. Quarzglasprisma. Totalreflexion

woselbst auch die aus der Fresnelschen Formel berechnete Kurve gestrichelt eingezeichnet ist. Das Einfallsazimut war 45°. Der Einfallswinkel 0 ist der Grenzwinkel der totalen Reflexion. An der Seite der Figur ist die Phasendifferenz angegeben, welche hier der besseren Übersicht wegen an der Grenze der Totalreflexion gleich Null angesetzt wurde. Unverkennbar ist der Einfluß einer aufgetragenen Paraffinschicht auf die Phasendifferenz, welche bei allen gemessenen Einfallswinkeln vermindert ist. Ganz besonders bemerkenswert ist indessen die große Abweichung der Phasendifferenz beim Prisma I von der durch die Fresnelsche Formel gegebenen, welche im Maximum über $\frac{\pi}{4}$ beträgt. Dieselbe ist auf keine Weise durch Beobachtungsfehler zu erklären, da gerade bei der Totalreflexion die Kompensatoreinstellungen erheblich genauer wurden als bei der gewöhnlichen Reflexion aus dem Grunde, weil das Azimut des reflektierten Strahles fast immer ungefähr 45° war. Auch beim Prisma IV ergibt sich eine durch Beobachtungsfehler wohl kaum zu erklärende Abweichung von der Fresnelschen Formel, welche an der Stelle des Maximums der Phasendifferenz etwa $\frac{\pi}{25}$ beträgt. Die tatsächlich gemessenen Phasendifferenzen sind bei beiden Prismen durchweg größer als die durch die Fresnelsche Formel gegebenen. Die folgende Tabelle D möge das eben Gesagte näher beleuchten:

D.

I gereinigt.			I mit Paraffinschicht.			IV gereinigt.		
$\delta_2 = 3{,}5$			$\delta_2 = 3{,}5$			$\delta_2 = 2{,}0$		
J	A	B	J	A	B	J	A	B
0	45,0	72,00	0	44,9	71,52	0	45,3	71,59
1°27′	45,7	73 99	1°27′	47,8	73 77	14′	45,7	72 89
2°49′	45,3	74 94	2°49′	47,9	74 60	40′	45,2	74 10
4°11′	45,0	75 46	4°11′	47,6	75 25	1°27′	45,5	75 18
6°13,5′	45,2	76 09	6°13,5′	47,5	75 76	3° 1′	44,6	76 38
8°16′	44,8	76 56	8°16′	47,6	76 13	5° 5,5′	45,2	77 08
12°57′	45,0	77 40	12°57′	47,6	77 01	7° 9′	45,1	77 39
18°11′	45,4	78 23	18°11′	47,9	77 65	9°10,5′	45,4	77 50
21°21′	45,0	78 76	21°21′	49,2	78 16	11°10′	44,7	77 42
						13°36′	44,1	77 31
						15°57′	43,5	77 18
						18°12,5′	42,8	76 99
						20°21′	41,2	76 66

Dem Einfallswinkel 0° in der Tabelle entspricht bei Prisma I der tatsächliche Einfallswinkel 43° 12,5′, bei IV 31° 27′. Man erhält die

Phasendifferenz Δ in Teilen von π, wenn man die unter B stehenden Zahlen einsetzt in

$$\Delta = \frac{\pi}{15{,}54} (B - 72{,}00).$$

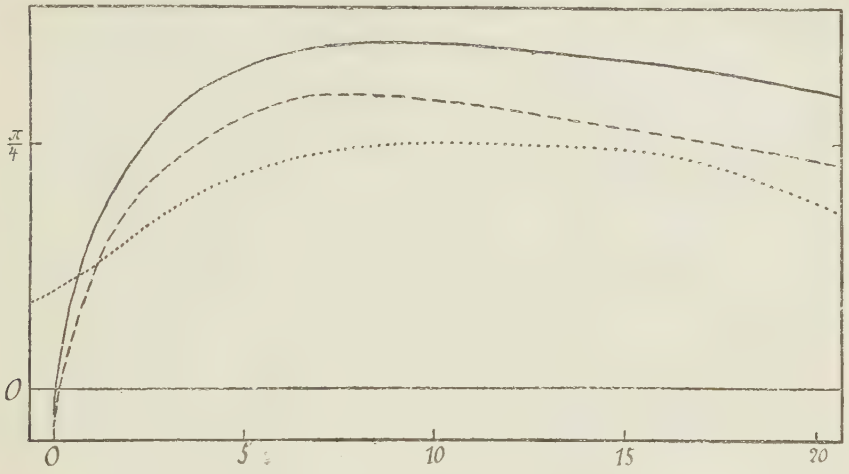
§ 9. Über das Eindringen des „total" reflektierten Lichtes in das dünnere Medium.

Da die Quinckeschen[1]) Messungen über das Eindringen des total reflektierten Lichtes in das dünnere Medium nach seiner eigenen Angabe[2]) mit Mängeln behaftet sind, die in der angewandten Methode lagen, so war es erwünscht, diese Untersuchungen mit dem oben beschriebenen großen Spektrometer zu wiederholen, nach einer abgeänderten Methode, welche jene Nachteile nicht besitzt, zumal bei dieser Art von Messungen ein Soleil-Babinetscher Kompensator noch nicht zur Verwendung gekommen ist.

Die Versuche, welche ich bis jetzt darüber angestellt habe, können nur als der Anfang einer größeren Versuchsreihe angesehen werden, da dieselben in mancher Beziehung der Vervollkommnung bedürfen. Es wurden zwei Prismen, III und IV, mit den ebenen Hypotenusenflächen aneinandergelegt, nachdem die Ränder der Hypotenusenflächen vorher mit einem Streifen Zinnfolie belegt worden waren. Dies so entstehende Doppelprisma wurde in ein besonderes Schraubengestell eingesetzt. Es wurde nur die bei der Totalreflexion auftretende Phasenverschiebung und die Drehung der Polarisationsebene an Prisma IV untersucht und zwar wurden drei Beobachtungsserien angestellt. Bei der ersten Serie waren die dazwischen liegenden Zinnfolienstreifen 7 μ dick, bei der zweiten 3 μ dick. Bei der dritten Serie wurden an Stelle der Zinnfoliestreifen die Ränder der Hypotenusenflächen mit Paraffin eingerieben, dessen Dicke $1\,^1/_2$ μ war. Die Dicken wurden sämtlich mittels Newtonscher Ringe ermittelt. Durch eine besondere Untersuchung wurde festgestellt, daß die Abstandsänderung der Hypotenusenflächen innerhalb des vom einfallenden Lichte getroffenen Hypotenusengebietes kleiner als eine halbe Wellenlänge war. Bei der ersten Serie war demgemäß der in Frage kommende Abstand etwa 6 μ, bei der zweiten 2 μ, und bei der dritten $^1/_4$ μ und darunter. Bei dieser Anordnung geht man freilich der genauen Dickenmessung der dünnen Luftlamelle, wie sie bei Quincke möglich war, verlustig, allein die Phasendifferenzen sind mit größerer Genauigkeit bestimmbar, und außerdem ist es nicht schwer, durch Verfeinerung der Anordnung eine erheblich genauere Dickenmessung, verbunden mit konstanter Schichtdicke der Luftlamelle, zu erzielen. Es wurde als Einfallsazimut 45^0 gewählt und Reflexionsazimut sowie Phasendifferenz gemessen. Die auf die beiden letzten

[1]) Quincke, Pogg. Ann. Bd. 127. p. 1. u. 199. 1866.
[2]) Quincke, ibid. p. 219.

Serien bezüglichen Kurven sind in Fig. 3 dargestellt (die gestrichelte u. punktierte Kurve), woselbst der besseren Vergleichung wegen auch die Kurve ihren Platz gefunden hat, bei der hinter der Hypotenusenfläche von IV das Prisma III



Figur 3. Doppelprisma „Totale" Reflexion

gänzlich entfernt ist. Die Kurve der ersten Serie ist nicht eingezeichnet worden, da sie nahezu mit der zuletzt genannten Kurve zusammenfällt. Man erkennt deutlich, daß mit kleiner werdendem Abstande der Hypotenusenflächen die Phasendifferenzenkurven im totalreflektierenden Einfallswinkelgebiet immer niedriger werden mit der Ausnahme, daß die punktierte Kurve am Grenzwinkel der totalen Reflexion ansteigt gegenüber der gestrichelten.

Die auf die eben besprochenen Kurven bezügliche Tabelle ist die folgende:

E.

Serie (1)			Serie (2)			Serie (3)		
$\delta_2 = 1{,}5$			$\delta_2 = 2{,}5$			$\delta_2 = 3{,}5$		
J	A	B	J	A	B	J	A	B
— 1,1′	45,9	70,35	— 6,5′	61,8	66,85	— 5°34′	87,8	72,00
— 0,4′	45,4	71 03	— 3,9′	53,0	67 80	— 1°56′	75,0	72 98
+ 0,3′	45,8	71 31	— 4,0′	47,1	69 40	—22,5′	64,9	73 47
+ 3,3′	45,6	72 14	— 1,3′	45,0	70 36	— 1,5′	63,3	73 52
+10,7′	45,6	72 62	+ 3,9′	45,6	71 28	+ 3,7′	62,6	73 82
+21,2′	45,3	73 17	+14,3′	45,2	72 18	+24,5′	61,1	73 81
36,9′	45,3	73 84	40,3′	45,1	73 27	+1°11,5′	56,7	74 08
1°21′	45,3	75 07	1°43′	45,9	74 66	2°45′	51,8	74 80
2°26′	45,1	76 02	3°48′	45,1	75 86	4°50′	47,8	75 33
4°31′	45,1	76 88	5°52′	45,3	**76 48**	7°24′	45,4	75 75
7°36′	44,8	**77 32**	12°24′	44,3	76 33	9°55′	44,5	75 86
12°35′	43,9	77 30	17° 6′	43,5	75 98	12°24′	44,7	**75 88**
17°16′	42,9	76 90	20°58′	41,8	75 46	14°47′	44,1	75 83
21°31′	41,0	76 63				17° 3′	42,9	75 50
						19°18′	41,9	75 13

Die negativen Winkel gehören der gewöhnlichen Reflexion an, sodaß also z. B. — 5°34′ einen Einfallswinkel von 25°53′ bedeutet.

Aus dieser Tabelle ist zu ersehen, daß die Maxima der Kompensatorzahlen abnehmen mit wachsender Annäherung der beiden Prismen, und daß in sehr großer Nähe der beiden Prismenflächen an der Grenze der Totalreflexion die Phasendifferenz bereits merklich über den Wert $-\pi$ hinausgewachsen ist.

Nachdem so in einem zweiten Teile die rein experimentellen Ergebnisse dargelegt worden sind, möge jetzt in einem dritten Teile ihre Diskussion und Vergleichung mit der Theorie erfolgen.

III. Diskussion und Vergleichung der experimentellen Resultate mit der Theorie.

§ 10. Gewöhnliche Reflexion.

Die umfassendste Reflexions-Theorie unter Berücksichtigung von Oberflächenschichten ist, wie p. 4 erwähnt, von Drude gegeben worden. Unter Vernachlässigung von Gliedern höherer als der ersten Ordnung in $\left(\frac{d}{\lambda}\right)$, wo d Schichtdicke, λ Wellenlänge ist, erhält Drude die folgende Formel[1]) für die Phasendifferenz $\Delta = \delta_p - \delta_s$ der Hauptkomponenten im Falle der gewöhnlichen Reflexion in Luft:

$$\operatorname{tg} \Delta = 2\varepsilon \, n^2 \, \frac{\sin \varphi \operatorname{tg} \varphi}{n^2 - \operatorname{tg}^2 \varphi} \tag{4}$$

Dabei bedeutet n den Brechungsindex des Mediums 2 gegen das Medium 1. In unserem Falle ist das Medium 2 die Prismensubstanz, das Medium 1 die Luft. φ ist der Einfallswinkel; ε ist der schon von Cauchy eingeführte Elliptizitätskoeffizient. Derselbe bedeutet das Axenverhältnis der Ellipse, in welcher der reflektierte Vektor schwingt, wenn der Einfallswinkel der Brewsterschen ist, multipliziert mit $\left(1 - \frac{2}{1 + n^2}\right)^{-1}$. Der Wert desselben ist wesentlich mitbedingt durch die Natur der Oberflächenschicht; denn mit dem Brechungsindex n hängt ε folgendermaßen zusammen:

$$\varepsilon = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{1}{n^2 - 1} \int_0^d dl \left(1 - \frac{1}{\nu^2}\right) (1 - \mu^2). \tag{6}$$

Die Integration ist über die Oberflächenschicht hinzuerstrecken in Richtung ihrer Normalen, ν bedeutet den Brechungsindex der betreffenden Stelle der Oberflächenschicht gegen Luft, μ den dieser Stelle gegen das

[1]) P. Drude, Wied. Ann. Bd. 43. p. 142. 1891. Die in seinem Lehrbuch der Optik gegebene Formel auf p. 273 weicht nur äußerlich von dieser Formel ab, da dort der Elliptizitätskoeffizient ε anders definiert ist.

Medium 2, also gegen die Prismensubstanz. Falls das Licht den umgekehrten Strahlengang geht, die Reflexion also in Glas erfolgt, wird aus Formel (4):

$$\operatorname{tg} \Delta = 2 \varepsilon n \frac{\sin \varphi \operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg}^2 \varphi - n^2}, \qquad (5)$$

wo n jetzt den Brechungsindex von Luft gegen Glas bedeutet, und ε die in (6) gegebene Bedeutung behält. Diese beiden Formeln (4) und (5) gelten aber nur für den speziellen Fall, daß das Einfallsazimut 45° ist. Da ich fast stets 5° gewählt hatte, so ist die rechte Seite von (4) und (5) noch mit ctg 5° zu multiplizieren, um in Einklang mit meinen Messungen zu kommen. Aus der maximalen Drehung der Polarisationsebene, wie sie aus den Tabellen A und B ersichtlich ist, ergaben sich folgende Werte für die Elliptizitätskoeffizienten bei den Prismen I, II, IV und V im natürlichen Zustande:

0,002 0,007 0,055 0,040,

Zahlen, zu welchen die Brechungsindizes gehören

1,46 + 1,52 1,92 2,39.

War die Oberfläche mit der 2—3 μ dicken Paraffinschicht überzogen, so ergab sich:

0,016 0,014 0,114 0,381.

Man ersieht, daß entsprechend dem Charakter der Kurven die Elliptizitätskoeffizienten der zweiten Gruppe sehr viel größer sind als die der ersten. Im großen und ganzen haben sie indes auch in diesem zweiten Falle Werte, welche anzeigen, daß die Dicke der Schicht immer noch klein gegenüber der Wellenlänge anzusehen ist, bleibt ja doch auch im Falle des Paraffins der Charakter der Kurven, wie er einer gegen die Wellenlänge dünnen Oberflächenschicht entspricht, gewahrt. Da nun aber als Oberflächenschicht im zweiten Falle nicht nur die natürliche, sondern auch die über 4 Wellenlängen dicke Paraffinschicht vorhanden war, so folgt: Die aus dem optischen Verhalten bei der Reflexion zu schließende Verdickung der Oberflächenschicht ist viel kleiner als die tatsächliche, mittels Newtonscher Ringe festgestellte. Es bleibt also wohl nur der Schluß übrig, daß auf das optische Verhalten bei der Reflexion nur ein sehr kleiner Teil der Paraffinschicht Einfluß hat. Und zwar scheint der dem Glase zunächst gelegene Teil der Paraffinschicht die Reflexion beeinflußt zu haben, da beim Prisma V, wo die Glasfläche nicht völlig glatt poliert war, also der dem Glase zunächst gelegene Paraffinschichtteil große Unebenheiten aufweisen muß, das reflektierte Licht stark diffus wurde durch die Paraffinschicht. Dabei kann der Paraffinschicht nicht etwa die Wirkungsweise einer gewöhnlichen planparallelen Platte zugeschrieben werden, da dann die Elliptizität und Drehung der Polarisationsebene ganz anders hätte ausfallen müssen wegen des niedrigen Brechungsindex des Paraffins.

Sehen wir jetzt im einzelnen zu, inwieweit die Beobachtungen durch Formel (4) dargestellt werden. Der Haupteinfallswinkel muß nach Formel (4) mit dem Brewsterschen Winkel zusammenfallen: da dies nicht bei den Prismen IV und V im natürlichen Zustande, und im Falle der Paraffinschicht bei keinem der vier Prismen zutraf, so muß hieraus geschlossen werden nicht nur, daß eine Oberflächenschicht vorhanden war — denn eine Oberflächenschicht kann entgegen der Behauptung Wernickes[1]) auch da sein, wo Haupteinfallswinkel und Brewsterscher Winkel zusammenfallen — sondern daß die Dicke der Oberflächenschicht bereits so groß ist, daß die Glieder von der Ordnung $\left(\frac{d}{\lambda}\right)^2$ sich bemerkbar machen. In der Tat zeigen auch die mittels der maximalen Drehung der Schwingungsebene berechneten Elliptizitätskoeffizienten gerade in den Fällen, wo die erwähnte Abweichung besteht, sehr hohe Werte gegenüber den beiden Fällen, wo dieselbe nicht eintritt. Bemerkenswert ist, daß trotz dieses Einwirkens der höheren Glieder Polarisations- und Haupteinfallswinkel dieselben geblieben sind, allerdings mit Ausnahme des Prismas V. Am Schlusse dieses Abschnittes möchte ich noch kurz auf die Resultate K. E. F. Schmidts eingehen. Er findet, daß Oberflächenschichten ganz ungesetzmäßige Änderungen in der Phasendifferenz hervorbringen. Da bei meinen Paraffinkurven die Abweichung von den für den „natürlichen" Zustand geltenden Kurven stets im selben Sinne erfolgt, muß ich sagen, daß meine Oberflächenschicht den Verlauf der Phasendifferenz qualitativ in durchaus gesetzmäßiger Weise, wie dies im Teil II näher dargelegt wurde, beeinflußt. Ferner findet Schmidt, daß das von ihm definierte „Elliptizitätsgebiet" bei Gläsern durch fremde Oberflächenschichten verkleinert wird. Ich finde bei allen von mir untersuchten Gläsern ausnahmslos das Gegenteil.

§ 11. Grenzgebiet der Totalreflexion.

Die Resultate der Versuche an der Grenze der Totalreflexion, nach welchen an dieser Grenze nicht die Phasendifferenz $-\pi$ auftritt, müssen auch auf den Einfluß der Oberflächenschicht geschoben werden, da die Paraffinkurven die Abweichung vom Verhalten, wie es ohne Oberflächenschicht stattfinden würde, noch verstärken. Innere Spannungen in den Gläsern scheinen die Resultate nicht erheblich beeinflußt zu haben, da die Abweichungen von der Phasendifferenz $-\pi$ mit Ausnahme von Prisma II im selben Sinne erfolgen.

Drude findet für die Phasendifferenz Δ der beiden Hauptkomponenten bei der totalen Reflexion unter Berücksichtigung einer Oberflächenschicht folgende Formel:[2])

[1]) W. Wernicke, Wied. Ann. Bd. 30. p. 452. 1887.
[2]) P. Drude, Wied. Ann. Bd. 43. p. 146. 1891.

$$\operatorname{tg}\frac{\Delta}{2} = \operatorname{tg}\frac{\Delta_0}{2} - \varepsilon\,\frac{n}{\sin\varphi\,\operatorname{tg}\varphi}. \qquad (7)$$

Dabei bedeutet Δ_0 die durch die bekannte Fresnelsche Formel gegebene Phasendifferenz. An der Grenze der Totalreflexion ist $\Delta_0 = 0$ und $\sin\varphi = n$, sodaß bei der Kleinheit von ε

$$\bar{\Delta} = -2\varepsilon\,\frac{\sqrt{1-n^2}}{n} \qquad (8)$$

folgt.

Zu bemerken ist, daß die Formel (8) leicht die Größe ε aus den Beobachtungen zu berechnen erlaubt. Da ε hier bereits früher aus der maximalen Drehung der Polarisationsebene bestimmt worden war, so wurde $\bar{\Delta}$ berechnet und zwar nur für das Prisma IV, weil nur bei diesem die experimentelle Bestimmung von $\bar{\Delta}$ seines großen Wertes wegen hinreichend genau war. Die Berechnung wurde für den natürlichen Zustand sowohl wie für die Paraffinoberflächenschicht durchgeführt.

Es ergab sich:

„Natürlicher" Zustand	Mit Paraffin belegt
Mit der Totalreflexionsformel berechnet	
$8{,}6^0$	$18{,}5^0$
Experimentell gefundener Wert	
$13{,}6^0$	$24{,}9^0$

Die Abweichungen vom Experiment lassen sich ohne weiteres durch die ungenaue Bestimmung von ε bezw. eventuell durch inzwischen eingetretene Veränderungen der Oberflächenschicht erklären.

Was nun jetzt die Erklärung jenes p. 16 erwähnten hellen Bandes anlangt, so zeigen die Beobachtungen keinerlei Anomalien, sodaß dasselbe wohl einer Kontrastwirkung, hervorgerufen durch die Intensitätsvermehrung beim Übergang von der gewöhnlichen zur totalen Reflexion, zuzuschreiben ist, ganz ähnlich wie es bei homogenem natürlichem einfallenden Lichte der Fall ist.

§ 12. Das Fresnelsche Winkelgebiet der Totalreflexion.

Die von Fresnel[1]) gegebene Formel für die bei der totalen Reflexion auftretende Phasendifferenz Δ_0 der Hauptkomponenten lautet beim Einfallsazimut 45^0:

$$\operatorname{tg} \frac{\Delta_0}{2} = \frac{\cos \varphi \sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}}{\sin^2 \varphi},$$

wo φ Einfallswinkel und n der Brechungsindex von Luft gegen die totalreflektierende Substanz ist. Eine andere Formel scheint bisher, solange man von Oberflächenschichten absieht, für die Elliptizität des totalreflektierten Lichtes noch nicht aufgestellt worden zu sein. Diese Formel hat nur zweimal eine exakte experimentelle Prüfung erfahren, nämlich durch Jamin im Jahre 1850 und durch Quincke im Jahre 1866. Dabei zeigte sich eine genügende Übereinstimmung mit der Formel. Dies ist bei meinen beiden Kurven, das Prisma I und IV betreffend, nicht der Fall. Sowohl der Winkel, bei dem die maximale Phasendifferenz eintritt, als auch der Wert dieses Maximums selber weichen sehr stark bei Prisma I ab. Daß die Phasendifferenz bei Prisma I bei sehr großen Einfallswinkeln wieder abnimmt, wurde durch einen besonderen Versuch festgestellt. Ferner wurde beim Prisma II die maximale Phasendifferenz durch Ablesungen bei fünf verschiedenen Einfallswinkeln in der Umgebung desjenigen mutmaßlichen Einfallswinkels festgestellt, bei dem das Maximum der Theorie nach eintreten mußte. Es zeigte sich, daß das gemessene Maximum nur um den 520. Teil einer Wellenlänge kleiner war als das durch die Fresnelsche Formel gegebene. Bei diesem Glasprisma gilt also jedenfalls die Fresnelsche Formel. Von einer durch ungleiches Abkühlen des Prisma I etwa entstandenen schwachen Doppelbrechung muß bei der Erklärung der Anomalie abgesehen werden. Denn erstens müßten bei gewöhnlichen Gläsern dann auch derartige enorme Abweichungen beobachtet sein. Ferner ist aber gerade bei Quarzglas mit seinem sehr kleinen Ausdehnungskoeffizienten eine auf diese Weise entstandene Anisotropie sehr unwahrscheinlich. Somit bleiben noch zwei Wege: Entweder die Fresnelsche Formel trifft bei isotropem Quarzglas nicht zu oder aber der geschmolzen gewesene Quarz hat sich allmählich wieder in einen kristallinischen Zustand zurückverwandelt. Da das letztere aus verschiedenen Gründen äußerst unwahrscheinlich ist, so bleibt, wie es scheint, nur übrig, daß bei Quarzglas eine Ausnahme der Fresnelschen Formel stattfindet.[2]) Beim Prisma IV sind die

[1]) Fresnel, Oeuvres, t. 1, p. 758, 781, 783, 784.

[2]) Da das Quarzglas die einzige Ausnahme von der Fresnelschen Formel zu sein scheint, indem die gewöhnlichen Gläser alle in ausreichender Weise der Formel zu folgen scheinen, so sind wir der Ansicht, daß vielleicht die Dispersion des Quarzes zur Erklärung herangezogen werden kann, indem Quarzglas im Ultraroten starke Absorptionslinien hat und mindestens die Dispersion des Quarzkristalles nur durch eine vierconstantige Dispersionsformel dargestellt wird. Unterstützt

Abweichungen bei weitem nicht so erheblich, zumal diejenigen Einfallswinkel, bei denen das theoretisch und das experimentell festgestellte Maximum der Phasendifferenz eintritt, ungefähr zusammenfallen. Den Unterschied zwischen Experiment und Theorie auf durch ungleiche Abkühlung entstandene Doppelbrechung zu schieben, halte ich für unzulässig, da eine starke ungleichmäßige Pressung dieses Prismas nur ganz geringen Einfluß auf den Verlauf der Phasendifferenzkurve hatte. Also auch bei sehr hohen Brechungsindizes scheint die Fresnelsche Formel nicht völlig mit den Experimenten übereinzustimmen. Nach Formel (7) wird die Phasenverschiebung bei der Totalreflexion durch Oberflächenschichten etwas verkleinert und zwar ist die Verkleinerung am größten an der Grenze der Totalreflexion. In der Tat sind die Kompensatorzahlen, welche in Tabelle D für Paraffin gelten, kleiner als die entsprechenden für den gereinigten Zustand geltenden.

§ 13. Über das Eindringen des total reflektierten Lichtes in das dünnere Medium.

Wir gehen schließlich zur Diskussion der sich auf das Doppelprisma beziehenden Untersuchungen über. Zunächst wird der von Quincke ausgesprochene Satz im großen und ganzen bestätigt: Mit wachsendem Abstande wird die Phasendifferenz größer und nähert sich dem durch die Fresnelsche Formel gegebenen Werte.[1])

Eine Einschränkung erleidet der Satz in folgenden Punkten. Bei unendlichem Abstande ist die Phasendifferenz etwas größer wie bei der Fresnelschen Formel, was vorhin schon diskutiert wurde. Bei sehr nahem Abstande ist die Phasendifferenz in der Umgebung des Grenzwinkels größer als die Fresnelsche. Außerdem verschiebt sich die maximale Phasendifferenz bei Verkleinerung des Abstandes zu größeren Einfallswinkeln. Nun hat W. Voigt[2]) eine Theorie dieser Erscheinungen entwickelt, die mit Quinckes Versuchen ziemlich übereinstimmt. Voigt gibt für den Fall, daß beide Prismen gleichen Brechungsindex haben, Formeln an, welche unmittelbar die Drehung der Polarisationsebene und die relative Phasenverschiebung zu berechnen gestatten aus Einfallswinkel, Schichtdicke und den Brechungsindizes der Medien. Diese Formeln zeigen, daß die Drehung der Polarisationsebene und die Phasendifferenz an der Grenze der Total-

---

wird diese Ansicht durch die sehr starke Dispersion des Prisma IV, bei welchem sich ja ähnliche, wenn auch viel schwächere Anomalien finden. Um diesen Gedanken weiter zu verfolgen, beabsichtigen wir, Körper auf die Elliptizität des totalreflectierten Lichtes hin zu untersuchen, die in möglichster Nähe der Wellenlänge des einfallenden Lichtes einen Absorptionsstreifen besitzen, also in der Umgebung dieser Wellenlänge anomal dispergierend sind. Diese Untersuchung läuft also darauf hinaus, eine Anomalie bei der Totalreflexion, hervorgerufen durch anomale Dispersion, aufzudecken. O. Lummer und R. Kynast.

[1]) G. Quincke, Pogg. Ann. Bd. 127. p. 220. 1866.

[2]) Voigt, Gött. Nachr. (3). p. 49. 1884.

reflexion Null sind. Dies ist bei meiner punktierten Kurve in Fig. 3 nicht der Fall. Vielleicht ist diese Nichtübereinstimmung auf die voneinander verschiedenen Brechungsindizes der beiden Prismen zurückzuführen. Hierüber müssen weitere Untersuchungen Aufschluß geben. Da bereits die gestrichelte Phasendifferenzkurve die Störung durch die Nähe des zweiten Prismas anzeigt und hierbei der Abstand der beiden Hypotenusenflächen nahe an 2 μ lag, so heißt dies, daß die Lichtbewegung mindestens 3 bis 4 Wellenlängen in das benachbarte Medium hineinreicht. Dieses Resultat steht in ausgezeichneter Übereinstimmung mit dem Quinckeschen Ergebnisse, der als maximales Eindringen bei einem Glase von niedrigerem Brechungsindex als in meinem Falle $3^1/_2$ Wellenlängen findet.

Nicht unerwähnt lassen möchte ich, daß die hier untersuchten Reflexionserscheinungen vielleicht sich ausbauen lassen werden zur Untersuchung von Änderungen optischer Natur, die sich innerhalb sehr dünner Schichten ereignen. Es würde dies etwa bei der Diffusion von Lösungen oder bei Mischungsvorgängen inbetracht kommen.

IV. Über die Lorenzsche Reflexionstheorie.

§ 14. Kritik derselben.

Der Umstand, daß die Lorenzsche Theorie, wie eingangs bemerkt, eine gewisse Sonderstellung unter den vorhandenen Reflexionstheorien einnimmt, sowie daß sie nicht vollständig durchgeführt ist und daher in der Literatur wenig Beachtung gefunden hat, veranlaßte mich, diese Theorie genauer zu untersuchen.

Die L.'sche Theorie setzt als Fundament die Richtigkeit der Fresnelschen Formeln bei mathematischer Grenzfläche der Medien voraus auch für den Fall, daß der Brechungswinkel sich vom Einfallswinkel nur um eine unendlich kleine Größe erster Ordnung unterscheidet. Bei dieser „infinitesimalen" Anwendung der Fresnelschen Formeln sind nicht mehr Hypothesen erforderlich als bei der „finitesimalen". Diese Formeln werden von L. in folgender Weise angewendet: Seien zwei isotrope durchsichtige Medien I und II längs einer Ebene durch eine sehr dünne, optisch andersartige Schicht, die Oberflächenschicht, voneinander getrennt; dann denkt sich L. die Oberflächenschicht in unendlich viele Parallelschichten, „Zwischenschichten" seien sie im folgenden genannt, zerlegt, wobei der gegenseitige Brechungsindex je zweier benachbarter Zwischenschichten sich nur um eine unendlich kleine Größe erster Ordnung von Eins unterscheidet. Der Brechungsindex der Zwischenschichten gegen das Medium I ist dann als eine stetige Funktion des Abstandes der jeweiligen Zwischenschicht von der das Medium I gegen die Oberflächenschicht abgrenzenden Ebene anzusehen, die kontinuierlich vom Werte Eins übergeht in den Wert, den der Brechungsindex des Mediums II gegen das Medium I hat.

Wir betrachten nur den Fall der gewöhnlichen Reflexion. L. wendet die infinitesimalen Fresnelschen Formeln auf jede Grenzfläche zweier Zwischenschichten an in der Weise, daß beim reflektierten Strahl, der allein näher betrachtet wird, sämtliche Strahlanteile oder vielmehr Amplitudenanteile, wie sie durch einmalige, dreimalige, fünfmalige etc. Reflexion an je einer, drei, fünf etc. Grenzflächen der Zwischenschichten zustande kommen, addiert werden mittels Integration über die ganze Oberflächenschicht, und angenommen wird, daß diese Summe der unendlich kleinen Anteile sich wie ein Strahl verhält. Indessen wird bei dieser Betrachtungsweise vorausgesetzt, daß die Konstitution der Oberflächenschicht analog ist derjenigen in den angrenzenden isotropen homogenen Medien I und II, sodaß auch zwischen zwei Zwischenschichten dieselben Grenzbedingungen gelten wie zwischen den Medien I und II, wenn dieselben durch keine Oberflächenschicht getrennt wären, d. h. die Oberflächenschicht unterscheidet sich von den angrenzenden Medien nur durch ihren anderen Brechungsindex. Gegen diese Annahme lassen sich indessen Bedenken erheben. Einmal ruft die Prozedur des Schleifens und Polierens wohl Spannungen und Drucke an der Glasoberfläche hervor, die nicht ganz ohne Einfluß auf die Grenzbedingungen innerhalb dieser Schicht sein werden. Andererseits aber werden die Molekularkräfte in dem Gebiete der Übergangsschicht einen einseitigen Druck ausüben, sodaß in der Oberflächenschicht die Isotropie aufhört. So hat z. B. Voigt die Ansicht ausgesprochen, es müsse neben der künstlichen, d. h. durchs Polieren hervorgerufenen Oberflächenschicht noch eine natürliche bestehen eben aufgrund der Molekularkräfte. K. v. d. Mühll und Drude tun im Prinzip dasselbe wie Lorenz, indem sie auch voraussetzen, daß die Oberflächenschicht sich hinsichtlich ihrer Struktur und den in ihr wirkenden Kräften analog verhalte wie die Medien I und II. Diese Voraussetzung hat also die L.sche Theorie mit den anderen Theorieen gemeinsam. Indessen hat sie den übrigen Theorieen gegenüber den Nachteil, daß sie mit einer unbewiesenen Voraussetzung operiert und auch sonst sich Schwierigkeiten mathematischer Natur ergeben, wie im Folgenden gezeigt wird.

Zunächst machen wir die Grundvoraussetzung, die hier stets gemacht werden wird, außer wo das Gegenteil ausdrücklich bemerkt wird, daß nämlich die Dicke der Oberflächenschicht der Wellenlänge des einfallenden Lichtes gegenüber als sehr klein angesehen werden darf. Für die Elongation des reflektierten Strahles, dessen einfallende Amplitude A in einem der beiden Hauptazimute liege, erhält L. folgenden Ausdruck:

$$A\left[\int_{u_\alpha}^{u_\beta} du_0 \cos(kt-\tilde{o}_0) - \int_{u_\alpha}^{u_\beta} du_0 \int_{u_\alpha}^{u_0} du_1 \int_{u_1}^{u_\beta} du_2 \cos(kt-\tilde{o}_0+\tilde{o}_1-\tilde{o}_2)\pm\ldots\right]. \quad (9)$$

Dabei ist für den senkrecht zur Einfallsebene schwingenden Strahl

$$u_\alpha = -\tfrac{1}{2} \lg \operatorname{tg} \alpha \qquad u_\beta = -\tfrac{1}{2} \lg \operatorname{tg} \beta$$
$$u_o = -\tfrac{1}{2} \lg \operatorname{tg} x_o \qquad \text{etc.}$$

für den parallel der Einfallsebene schwingenden Strahl hingegen:

$$u_\alpha = \tfrac{1}{2} \lg \sin 2\alpha, \; u_\beta = \tfrac{1}{2} \lg \sin 2\beta, \; u_o = \tfrac{1}{2} \lg \sin 2 x_o \text{ etc.}$$

Hierbei denken wir uns die Oberflächenschicht horizontal, den einfallenden Strahl oberhalb, den gebrochenen unterhalb der Oberflächenschicht. α ist der tatsächlich beobachtete Einfallswinkel, β der tatsächlich beobachtete Brechungswinkel, x_o der innerhalb der Oberflächenschicht variierende Einfallswinkel, δ_o die Phasenverschiebung, die ein an der Grenzfläche der Zwischenschicht mit dem Einfallswinkel x_o reflektierter Strahl gegen den an der obersten Schicht der Oberflächenschicht reflektierten Strahl erleidet, entsprechend δ_1 die Phasenverschiebung, die ein an der Zwischenschicht mit dem Einfallswinkel x_1 reflektierter Strahl erleidet gegenüber dem an der Zwischenschicht mit dem Einfallswinkel x_o reflektierten Strahle; δ_2 bezieht sich dann analog auf zwei Zwischenschichten mit den Einfallswinkeln x_1 und x_2. Die Elongation des einfallenden Strahles ist A cos kt an der Stelle des Auftreffens des Strahles an der obersten Grenzfläche der Oberflächenschicht. k ist gleich 2π, dividiert durch die Schwingungsdauer der betreffenden Farbe. L. hat den Konvergenzbeweis für die Reihe (9) nicht erbracht. Es sei mir gestattet, diese Lücke hier auszufüllen. Sei die Reihe mit R bezeichnet, dann ist

$$R \leq \left| \int_{u_\alpha}^{u_\beta} du_o \cos (kt - \delta_o) \right| + \left| \int_{u_\alpha}^{u_\beta} du_o \int_{u_\alpha}^{u_o} du_1 \int_{u_1}^{u_\beta} du_2 \cos (kt - \delta_o + \delta_1 - \delta_2) \right| + \ldots$$

oder da der Cosinus stets reelles Argument hat:

$$R \leq \left| \int_{u_\alpha}^{u_\beta} du_o \right| + \left| \int_{u_\alpha}^{u_\beta} du_o \int_{u_\alpha}^{u_o} du_1 \int_{u_1}^{u_\beta} du_2 \right| + \left| \int_{u_\alpha}^{u_\beta} du_o \int_{u_\alpha}^{u_o} du_1 \int_{u_\alpha}^{u_1} du_2 \int_{u_\alpha}^{u_2} du_3 \int_{u_3}^{u_\beta} du_4 \right| + \ldots$$

$$\ldots + \left| \int_{u_\alpha}^{u_\beta} du_o \int_{u_\alpha}^{u_o} du_1 \int_{u_\alpha}^{u_1} du_2 \ldots \int_{u_\alpha}^{u_{\nu-2}} du_{\nu-1} \int_{u_{\nu-1}}^{u_\beta} du_\nu \right| + \ldots .$$

Wir wollen folgende neuen Variablen einführen:

$$\text{Sei } v_\nu = u_\nu - u_\alpha \qquad (\nu = 0\ 1\ 2 \ldots)$$

Alsdann ist wegen $du_\nu = dv_\nu$ das allgemeine Glied der letzten Reihe

$$J_\nu = \int_0^{u_\beta - u_\alpha} dv_o \int_0^{v_o} dv_1 \int_0^{v_1} dv_2 \ldots \int_0^{v_{\nu-2}} dv_{\nu-1} \int_{v_{\nu-2}}^{u_\beta - u_\alpha} dv_\nu$$

Wegen $\int_{\upsilon_{\nu-1}}^{u_\beta - u_\alpha} d\upsilon_\nu = u_\beta - u_\alpha - \upsilon_{\nu-1}$ ist

$$J_{\frac{\nu}{2}} = (u_\beta - u_\alpha) \int_0^{u_\beta - u_\alpha} d\upsilon_0 \int_0^{\upsilon_0} d\upsilon_1 \ldots \int_0^{\upsilon_{\nu-2}} d\upsilon_{\nu-1} - \int_0^{u_\beta - u_\alpha} d\upsilon_0 \int_0^{\upsilon_0} d\upsilon_1 \ldots \int_0^{\upsilon_{\nu-2}} \upsilon_{\nu-1}\, d\upsilon_{\nu-1},$$

oder

$$J_{\frac{\nu}{2}} = (u_\beta - u_\alpha) \frac{(u_\beta - u_\alpha)^\nu}{\nu!} - \frac{(u_\beta - u_\alpha)^{\nu+1}}{(\nu+1)!} \quad \text{oder}$$

$$J_{\frac{\nu}{2}} = (u_\beta - u_\alpha) \left(1 - \frac{1}{\nu+1}\right) \frac{(u_\beta - u_\alpha)^\nu}{\nu!}.$$

Sei das Maximum von $\left| (u_\beta - u_\alpha)^\nu \left(1 - \frac{1}{\nu+1}\right) \right|$ mit M bezeichnet, so ist

$$J_{\frac{\nu}{2}} \leqq M \frac{(u_\beta - u_\alpha)^\nu}{\nu!} \text{ und daher}$$

$$R \leqq \sum_{\frac{\nu}{2}=0123} \left| J_{\frac{\nu}{2}} \right|, \qquad R \leqq M \cdot \sum_{\nu=0,2,4\ldots} \left| \frac{(u_\beta - u_\alpha)^\nu}{\nu!} \right|.$$

Die letzte Summe konvergiert für jeden endlichen Wert von $u_\beta - u_\alpha$ gleichmäßig. Damit ist die gleichmäßige Konvergenz von R auf der ganzen reellen Axe erwiesen. Die Reihe (9) ist, indem wir der L.schen Darstellung folgen, der reelle Teil von

$$A \int_{u_\alpha}^{u} du_0\, e^{i(kt - \delta_0)} f(u_0),$$

wo

$$f(u_0) = 1 - \int_{u_\alpha}^{u_0} du_1 \int_{u_1}^{u_\beta} du_2\, e^{(\delta_1 - \delta_2)i} f(u_2) \tag{9'}$$

ist. Aus dieser Gleichung folgt, indem statt x_0, u_0, δ_0 jetzt x, u, δ gesetzt ist, die Differentialgleichung:

$$\frac{d}{du}\left(e^{-i\delta} f'(u)\right) = e^{-i\delta} f(u). \tag{10}$$

Dieselbe gestattet, einen einfacheren Ausdruck für die Reihe (9) zu erlangen, indem (9) der reelle Teil von

$$A \left[e^{i(kt - \delta)} f'(u) \right]_{u = u_\alpha}^{u = u_\beta}$$

wird oder wegen $f'(u\beta) = o$ und $\delta = o$ für $u = u\alpha$ der reelle Teil von

$$-A e^{ikt} f'(u\alpha). \tag{11}$$

Nun definiert L. eine Funktion $\chi(u)$ durch folgende Gleichung:

$$f(u) = e^{i\chi(u)} \frac{\mathfrak{Cof}(u-u\beta)}{\mathfrak{Cof}(u\alpha-u\beta)},$$

wo $\mathfrak{Cof}$ der hyperbolische Cosinus ist. Diesen Wert für $f(u)$ setzt er in Gleichung (10) ein und erhält damit für $\chi(u)$ folgende Differentialgleichung:

$$\frac{d^2\chi}{du^2} + \frac{\mathfrak{Sin}(u-u\beta)}{\mathfrak{Cof}(u-u\beta)} \cdot \frac{d(2\chi-\delta)}{du} + i\frac{d\chi}{du} \cdot \frac{d(\chi-\delta)}{du} = 0 \tag{12}$$

wo $\chi = 0$ für $u = u\alpha$ und $\frac{d\chi}{du} = 0$ für $u = u\beta$ ist. Dabei wird $\frac{d\delta}{du}$ als bekannte Funktion von u vorausgesetzt. Jetzt macht L., um diese allgemeine Riccatische Gleichung zu vereinfachen, die Annahme, daß

$$\frac{d\chi}{du} \text{ und } \frac{d\delta}{du}$$

sehr klein seien. sodaß das mit i multiplizierte Glied 2. Ordnung in $\frac{d\chi}{du}$ und $\frac{d\delta}{du}$ weggelassen werden darf. Dann ergibt die Integration von (12):

$$\frac{d\chi}{du} = -\frac{1}{\mathfrak{Cof}^2(u-u\beta)} \int_u^{u\beta} \left(\mathfrak{Sin}\, 2\,(u-u\beta)\right) \frac{d\delta}{du}\, du. \tag{13}$$

Nun argumentiert L. folgendermaßen: „Wenn in diesen Ausdruck die Werte von u eingesetzt werden, so ersieht man, daß $\frac{d\chi}{du}$ für alle Einfallswinkel eine kleine Größe ist, sobald $\frac{d\delta}{du}$ klein ist, was also die einzige Voraussetzung ist.“ Da nun, wie eine von L. durchgeführte einfache geometrische Überlegung zeigt:

$$\frac{d\delta}{du} = \frac{d\delta}{dx} \cdot \frac{dx}{du} = \begin{cases} -\frac{8\pi}{\lambda} \sin\alpha \cos^2 x \frac{d\rho}{dx} \\ \frac{8\pi}{\lambda} \sin\alpha \frac{\cos^2 x}{\cos 2x} \frac{d\rho}{dx} \end{cases} \tag{14}$$

ist für den senkrecht bezw. parallel zur Einfallsebene schwingenden Vektor, indem ρ der Abstand derjenigen Zwischenschicht von der oberen Grenzfläche der Oberflächenschicht ist, wo der Brechungswinkel den Wert x hat, so darf die Annahme, daß $\frac{d\delta}{du}$ klein ist, folgendermaßen gedeutet werden: Man hat die Dicke der Oberflächenschicht als klein gegenüber der Wellenlänge anzusehen, denn die Änderung von x muß gegenüber der Änderung

von $\frac{\rho}{\lambda}$ sehr klein sein. Da nämlich $\frac{\rho}{\lambda}$ als Faktor $\frac{d}{\lambda}$ enthalten muß, während der andere, übrigbleibende Faktor eine Funktion von x ohne Pole sein muß, so folgt, daß auch der Differentialquotient von $\frac{\rho}{\lambda}$ eine kleine Größe ist. Bei Annahme unserer Grundvoraussetzung ist also $\frac{d\delta}{du}$ im allgemeinen klein. Indessen trifft dies nicht mehr zu, wenn $x = 45^0$ ist, indem dann für den parallel zur Einfallsebene schwingenden Vektor $\frac{d\delta}{du}$ unendlich groß wird, da die Annahme, $\frac{d\rho}{dx}$ sei für jenen Winkel gleich Null, auszuschließen ist. Zu dieser einen Schwierigkeit tritt noch eine zweite hinzu. Bei den eben dargelegten Entwickelungen ist nämlich die Kleinheit von $\frac{d\delta}{du}$ garnicht die einzige Annahme, sondern es muß, entgegen L., auch $\frac{d\chi}{du}$ im ganzen Intervall u_α bis u_β als klein angesehen werden. Denn der Ausdruck (13), aus dem nach L. die Überflüssigkeit der Annahme der Kleinheit von $\frac{d\chi}{du}$ folgt, ist bereits mit Hilfe eben dieser Annahme gewonnen worden. Damit also die L.schen Entwickelungen Gültigkeit behalten, ist, ganz abgesehen von der schon erwähnten Schwierigkeit, durchaus auch noch die Annahme der Kleinheit von $\frac{d\chi}{du}$ erforderlich. Dafür läßt sich aber a priori, soweit ich sehen kann, kein Grund anführen. Der Erfolg allein gibt dieser Annahme eine gewisse Berechtigung. Führt man nämlich unter den eben besprochenen Annahmen die Rechnung weiter aus, so ergeben sich für die absoluten Phasenverzögerungen Δ_s und Δ_p der senkrecht und parallel zur Einfallsebene schwingenden Komponenten die beiden Gleichungen:

$$\operatorname{tg} \Delta_s = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2\alpha - \sin^2\beta} \int_\alpha^\beta [\cos^2\beta \operatorname{tg} x - \sin^2\beta \cot x] \frac{d\delta}{dx} dx \qquad (15_1)$$

$$\operatorname{tg} \Delta_p = \frac{\sin 2\alpha \sin 2\beta}{\sin^2 2\alpha - \sin^2 2\beta} \int_\alpha^\beta \left[\frac{\sin 2x}{\sin 2\beta} - \frac{\sin 2\beta}{\sin 2x}\right] \frac{d\delta}{dx} dx. \qquad (15_2)$$

Formt man diese Gleichungen in geeigneter Weise um, was L. unterlassen hat und was wohl die z. T. irrige Auffassung der L.schen Theorie in der Literatur herbeigeführt hat, so ergibt sich für die relative Verzögerung Δ der beiden Komponenten:

$$\operatorname{tg} \Delta = 2\varepsilon \, n^2 \frac{\sin \alpha \operatorname{tg} \alpha}{n^2 - \operatorname{tg}^2\alpha}, \qquad (16)$$

wobei

$$\varepsilon = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{J_1 - n^2 J_2}{n^2 - 1}$$

$$J_1 = \int_1^{\tau_1} \rho \, d\tau \qquad J_2 = \int_1^{\tau_1} \frac{\rho}{\tau^2} \, d\tau$$

$$\tau = \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2 x} \qquad \tau_1 = \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta}$$

ist. Diese Formel ist aber identisch mit der von Drude gegebenen nur daß der Elliptizitätskoeffizient eine etwas andere Form hat. Es führt also die konsequente Weiterführung der L.schen Theorie direkt auf die Drudesche Formel. Dies Resultat ist insofern bemerkenswert, als Drude selber im Jahre 1891[1]) sagt, die L.sche Theorie führe zu anderen Resultaten als es die seinigen seien. Es ergeben sich jetzt nun auch dieselben Konsequenzen wie aus Drudes Theorie. Der Elliptizitätskoeffizient kann positiv oder negativ sein je nach der Beschaffenheit der Oberflächenschicht. Bei Körpern z. B. mit negativer Reflexion, deren Brechungsindex gegen das angrenzende Medium größer als Eins ist, sind die Grenzen der Integrale J_1 und J_2 folgendermaßen zu nehmen, indem man mit Drude und Voigt die negative Reflexion bei diesen Körpern durch das Vorhandensein eines Maximums des Brechungsindex innerhalb der Oberflächenschicht erklärt. Ist $\sqrt{\tau'_1}$ dieses Maximum, so ist

$$J_1 = \int_1^{\tau'_1} \rho d\tau - \int_{\tau_1}^{\tau'_1} \rho d\tau \quad \text{und} \quad J_2 = \int_1^{\tau'_1} \frac{\rho}{\tau^2} \, d\tau - \int_{\tau_1}^{\tau'_1} \frac{\rho}{\tau^2} \, d\tau$$

$$(\tau'_1 > \tau_1).$$

Man erkennt hieraus, daß der absolute Betrag der subtrahierten Integrale größer sein kann als derjenige der ersten Integrale, indem ρ bei den zweiten Integralen von einem bestimmten Betrage ρ' an bis d, der Gesamtdicke der Schicht, steigt, während es bei den ersten Integralen von 0 bis ρ' variiert. Dabei ist vorausgesetzt, daß

$$| J_1 | > \tau_1 J_2 |$$

ist. Mithin ist in diesem Falle der Elliptizitätskoeffizient negativ in Übereinstimmung mit der Erfahrung. Formel (16) gibt also die positive und negative Reflexion wieder. Sie gibt ferner das bei der gewöhnlichen Reflexion auftretende elliptische Gebiet wieder u. s. w. Die von Herrn Mascart[2]) aus den Lorenzschen Formeln gezogenen Folgerungen, die zu

[1]) Drude, Wied. Ann. Bd. 43. p. 126. 1891.

[2]) Mascart, Traité d'optique, T. deuxième, 1891, p. 439. „L'angle α est toujours très petit et la différence de phase ε des composantes principales est sensiblement égale à β." Dies gilt eben nur in der nächsten Umgebung des

ganz anderen Resultaten führen, müssen als unrichtig bezeichnet werden, da Mascart glaubt, die absolute Phasenverschiebung der einen Komponente gegenüber der absoluten Phasenverschiebung der anderen Komponente bei vom Polarisationswinkel entfernten Einfallswinkeln vernachlässigen zu können. Wird die einfallende Amplitude gleich E_s resp. E_p gesetzt, so erhalten wir für die in den Hauptazimuten reflektierten Komponenten R_s und R_p die Beziehungen:

$$R_s = E_s \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)\cos\Delta_s}$$
$$R_p = E_p \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)\cos\Delta_p}, \qquad (17)$$

Formeln, welche den Fresnelschen sehr nahe stehen. Auch Drude erhält ganz analoge Ausdrücke.

Die L.sche Theorie gibt also die Erscheinungen der gewöhnlichen Reflexion gut wieder trotz der beiden oben erörterten Schwierigkeiten, aufgrund deren das ganze Verfahren als mathematisch unzulässig bezeichnet werden muß.

§ 15. Ihre Weiterführung.

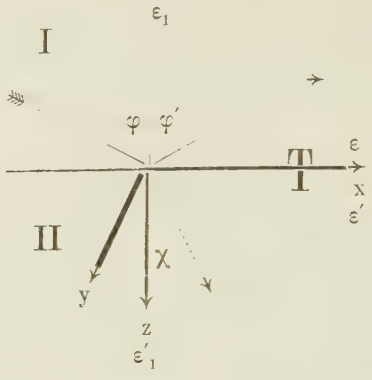
Man kann nun versuchen, unter Beibehaltung der L.schen Grundgedanken, die erwähnten mathematischen Schwierigkeiten zu umgehen, indem man die Oberflächenschicht als ein kristallinisches Medium auffaßt, dadurch entstanden, daß infolge der Molekularkräfte des Glases ein Druck senkrecht zur Oberflächenschicht auf dieselbe ausgeübt wird. Sie wird sich dann ähnlich wie ein einaxiger Kristall verhalten, indem die Dielektrizitätskonstante, genommen senkrecht zur Oberflächenschicht, abweicht an jeder Stelle von derjenigen Dielektrizitätskonstanten, die parallel der Oberflächenschicht genommen wird. Wir wollen nun so vorgehen, daß wir zunächst die Reflexionsformel aufstellen, welche an der mathematischen Grenzfläche zwischen zwei derartigen Medien besteht, sodann diese Formel ins Infinitesimale übertragen und nunmehr das L.sche Verfahren ansetzen, dasselbe jedoch in anderer Weise zur Durchführung bringen.

Wir legen ein rechtwinkliges x-y-z-Koordinatensystem so, daß die z-Axe senkrecht auf der Trennungsebene T der beiden eben beschriebenen Medien I und II steht und nach unten, d. h. in das Medium II zeigt, die x-Achse nach rechts, die y-Achse nach vorn zeigt. Die einfallende Welle komme von links und habe den Einfallswinkel φ, der Brechungswinkel sei χ, der Reflexionswinkel φ'. Der Koordinatenanfangspunkt liege in der Ebene T. Die Dielektrizitätskonstante in horizontaler Richtung, ε, ist von der in vertikaler Richtung genommenen, ε_1, verschieden. Diese Be-

---

Brewsterschen Winkels: für alle anderen Einfallswinkel ist indessen β von derselben Größenordnung wie α, sodaß das Vorzeichen von δ sehr wohl durch α beeinflußt werden kann.

zeichnung möge für Medium I gelten, im Medium II sind die entsprechenden Größen ε' und ε'_1. Dabei sind ε und ε' von der Richtung in einer



Horizontalebene unabhängig. Der Symmetrie wegen reicht es aus, wenn wir die einfallende Welle auf die x-z-Ebene beschränken. Als Lichtvektor nehmen wir, um Anschluß an die Fresnelsche Theorie zu gewinnen, die elektrische Strömung. Indem wir uns auf trigonometrische Funktionen beschränken, gelangen wir zu folgender Darstellung der elektrischen bezw. magnetischen Komponenten:

Elektrische Komponenten:

$$
\left.
\begin{aligned}
X_e &= \frac{E_p}{\varepsilon} \cos\varphi \cdot \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x\sin\varphi + z\cos\varphi}{V_1}\right)\\
Y_e &= \frac{E_s}{\varepsilon} \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x\sin\varphi + z\cos\varphi}{V_1}\right)\\
Z_e &= -\frac{E_p}{\varepsilon_1} \sin\varphi \cdot \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x\sin\varphi + z\cos\varphi}{V_1}\right)\\
X_r &= \frac{R_p}{\varepsilon} \cos\varphi' \cdot \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x\sin\varphi' + z\cos\varphi'}{V_1'}\right)\\
Y_r &= \frac{R_s}{\varepsilon} \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x\sin\varphi' + z\cos\varphi'}{V_1'}\right)\\
Z_r &= -\frac{R_p}{\varepsilon_1} \sin\varphi' \cdot \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x\sin\varphi' + z\cos\varphi'}{V_1'}\right)\\
X_d &= \frac{D_p}{\varepsilon'} \cos\chi \cdot \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x\sin\chi + z\cos\chi}{V_2}\right)\\
Y_d &= \frac{D_s}{\varepsilon'} \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x\sin\chi + z\cos\chi}{V_2}\right)\\
Z_d &= -\frac{D_p}{\varepsilon_1'} \sin\chi \cdot \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x\sin\chi + z\cos\chi}{V_2}\right)
\end{aligned}
\right\} \quad (18)
$$

Magnetische Komponenten:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_e &= C\frac{E_s}{\varepsilon}\frac{\cos\varphi}{V_1}\cos\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x\sin\varphi+z\cos\varphi}{V_1}\right)\\
\beta_e &= -C\frac{E_p}{V_1}\left(\frac{\sin^2\varphi}{\varepsilon_1}+\frac{\cos^2\varphi}{\varepsilon}\right)\cos\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x\sin\varphi+z\cos\varphi}{V_1}\right)\\
\alpha_r &= C\frac{R_s}{\varepsilon}\frac{\cos\varphi'}{V_1}\cos\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x\sin\varphi'+z\cos\varphi'}{V_1'}\right)\\
\beta_r &= -C\frac{R_p}{V_1'}\left(\frac{\sin^2\varphi'}{\varepsilon_1}+\frac{\cos^2\varphi'}{\varepsilon}\right)\cos\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x\sin\varphi'+z\cos\varphi'}{V_1'}\right)\\
\alpha_d &= C\frac{D_s}{\varepsilon'}\frac{\cos\chi}{V_2}\cos\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x\sin\chi+z\cos\chi}{V_2}\right)\\
\beta_d &= -C\frac{D_p}{V_2}\left(\frac{\sin^2\chi}{\varepsilon_1'}+\frac{\cos^2\chi}{\varepsilon'}\right)\cos\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x\sin\chi+z\cos\chi}{V_2}\right)
\end{aligned}\right\}\quad(19)$$

Dabei gelten die mit dem Index $_e$ versehenen Größen für die einfallende Welle, die mit den Indizes $_r$ und $_d$ versehenen für die reflektierte und durchgehende Welle. C ist die Lichtgeschwindigkeit im Äther. E_p und E_s sind die parallel und senkrecht zur Einfallsebene schwingenden Komponenten der einfallenden Welle, während R_p, R_s, D_p und D_s die entsprechenden Bedeutungen für die reflektierte und durchgehende Welle haben. V_1, V_1' und V_2 sind die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der einfallenden, reflektierten und durchgehenden Welle. Wendet man nunmehr die bekannte „Fresnelsche Gleichung", welche den Wert der Geschwindigkeit in seiner Abhängigkeit von der Fortpflanzungsrichtung angibt, auf die Größen V_1, V_1', V_2 an, so ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned}
V_2 &= C\sqrt{\frac{\sin^2\varphi}{\varepsilon_1}+\frac{\cos^2\varphi}{\varepsilon}}\\
V_1' &= C\sqrt{\frac{\sin^2\varphi'}{\varepsilon_1}+\frac{\cos^2\varphi'}{\varepsilon}}\\
V_1 &= C\sqrt{\frac{\sin^2\chi}{\varepsilon_1'}+\frac{\cos^2\chi}{\varepsilon'}}
\end{aligned}\right\}\quad(20)$$

Die zu den Gleichungen (18) und (19) hinzutretenden bekannten Grenzbedingungen führen zu folgendem Gleichungssystem, wo bereits $\varphi' = \pi - \varphi$ eingefügt ist:

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon'\cos\varphi\,(E_p - R_p) &= D_p\,\varepsilon\cos\chi\\
\varepsilon'\,(E_s + R_s) &= \varepsilon\,D_s\\
\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}}\,\frac{\cos\varphi}{\sqrt{\varepsilon\sin^2\varphi+\varepsilon_1\cos^2\varphi}}\,(E_s - R_s) &= D_s\sqrt{\frac{\varepsilon_1'}{\varepsilon'}}\,\frac{\cos\chi}{\sqrt{\varepsilon'\sin^2\chi+\varepsilon_1'\cos^2\chi}}\\
\frac{\sqrt{\varepsilon\sin^2\varphi+\varepsilon_1\cos^2\varphi}}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_1}}\,(E_p + R_p) &= D_p\,\frac{\sqrt{\varepsilon'\sin^2\chi+\varepsilon_1'\cos^2\chi}}{\sqrt{\varepsilon'\varepsilon_1'}}
\end{aligned}\right\}\quad(21)$$

Ferner lautet das aus den obigen Grenzbedingungen hergeleitete Brechungsgesetz:

$$\frac{\sin\varphi\ \sqrt{\varepsilon\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon\sin^2\varphi+\varepsilon_1\cos^2\varphi}}=\frac{\sin\chi\ \sqrt{\varepsilon'\varepsilon_1'}}{\sqrt{\varepsilon'\sin^2\chi+\varepsilon_1'\cos^2\chi}},\tag{22}$$

das natürlich in das gewöhnliche Brechungsgesetz übergeht, wenn $\varepsilon_1=\varepsilon$, $\varepsilon_1'=\varepsilon'$ gesetzt wird. Die kombinierte Anwendung von (21) und (22) gibt folgende den gewöhnlichen Fresnelschen Formeln analoge Formeln:

$$\begin{aligned}
R_p &= E_p\,\frac{\varepsilon'\cos\varphi\sin\chi-\varepsilon\sin\varphi\cos\chi}{\varepsilon'\cos\varphi\sin\chi+\varepsilon\sin\varphi\cos\chi}\\
R_s &= -E_s\,\frac{\sin(\varphi-\chi)}{\sin(\varphi+\chi)}\\
D_p &= E_p\,\frac{2\varepsilon'\sin\varphi\cos\chi}{\varepsilon\sin\varphi\cos\chi+\varepsilon'\sin\chi\cos\varphi}\\
D_s &= E_s\,\frac{2\varepsilon'\sin\chi\cos\varphi}{\varepsilon\sin(\varphi+\chi)}.
\end{aligned}\tag{23}$$

Um jetzt daraus die infinitesimalen Formeln zu erhalten, setzen wir in (23):

$$\begin{aligned}
\varepsilon' &= \varepsilon+d\varepsilon\\
\varphi &= x\\
\chi &= x+dx,
\end{aligned}$$

alsdann wird aus dem System (23):

$$\begin{aligned}
R_s &= -E_s\,\frac{dx}{\sin 2x} & R_p &= E_p\left(\frac{dx}{\sin 2x}+\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}\right)\\
D_s &= E_s\left(1+\frac{dx}{\sin 2x}+\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}\right) & D_p &= E_p\left(1-\frac{dx}{\operatorname{tg}2x}+\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}\right).
\end{aligned}\tag{24}$$

Wir behandeln zunächst die senkrecht zur Einfallsebene schwingende Komponente und folgen dabei dem L.schen Ideengange. Sei die Amplitude des durchgehenden Strahles an der Stelle der Oberflächenschicht, wo der Einfallswinkel des eintretenden Strahles gleich x ist, mit $\psi(x)$ bezeichnet, dann wird die Amplitude, nachdem der Strahl durch die durch den Wert x charakterisierte Ebene der Oberflächenschicht hindurchgegangen ist, sich um einen kleinen Betrag $d\psi$ geändert haben, sodaß die durch diese Ebene „hindurchgegangene" Amplitude den Wert $\psi+d\psi$ haben wird. Wird daher die beim Winkel x einfallende Amplitude gleich Eins gesetzt, so ist die durchgehende Amplitude an der Stelle $x+dx$:

$$\psi+d\psi=1+\frac{dx}{\sin 2x}+\frac{d\varepsilon}{2\varepsilon};\tag{25}$$

die Amplitude des in die Oberflächenschicht eindringenden Strahls sei mit E_x bezeichnet, der Einfallswinkel des Strahls beim Beginn des Eindringens

mit α, der Brechungswinkel beim Verlassen der Oberflächenschicht mit β bezeichnet. Alsdann ist

$$\frac{d\psi}{\psi} = \frac{dx}{\sin 2x} + \frac{d\varepsilon}{2\varepsilon} \tag{25'}$$

also

$$\psi = E_s \sqrt{\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}\alpha}} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_\alpha}} \text{ wegen } \psi(\alpha) = E_s .$$

Ist also E_s die unter dem Winkel α eintretende Amplitude, so erhält man daraus die bis zur Schicht mit dem Einfallswinkel x durchgegangene Amplitude, indem man E_s mit $\sqrt{\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}\alpha}} \sqrt{\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_\alpha}}$ multipliziert. Die von dieser letzteren Schicht reflektierte Amplitude ist

$$\psi\, du = E_s \sqrt{\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}\alpha}} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_\alpha}}\, du, \quad \text{wo} \tag{26}$$

$$u = -\tfrac{1}{2} \lg \operatorname{tg} x \tag{26'}$$

ist. Die hieran anzuschließenden Überlegungen zur Berechnung der reflektierten Amplitude sind formal dieselben wie bei Lorenz.

Wir geben daher gleich das Endresultat an:

Wir gelangen zu der auch von L. aufgestellten Reihe (9) für die Elongation aller in das erste Medium wieder zurückgeworfenen Strahlanteile, welche senkrecht zur Einfallsebene schwingen:

$$E_s \left[\int_{u_\alpha}^{u_\beta} du \cos(kt - \tilde{\sigma}) - \int_{u_\alpha}^{u_\beta} du \int_{u_\alpha}^{u} du_1 \int_{u_1}^{u_\beta} du_2 \cos(kt - \tilde{\sigma} - \tilde{\sigma}_1 - \tilde{\sigma}_2) + \ldots \right], \tag{27}$$

wo k und die Größen $\tilde{\sigma}$ die p. 30 gegebenen Bedeutungen haben.

Bei der Aufstellung der Gesamtamplitude der zur Einfallsebene parallel schwingenden Komponente wiederholen sich nun genau dieselben Betrachtungen und Schlüsse, die soeben gemacht wurden, nur daß die auftretenden Variablen andere sind. Wir dürfen uns daher damit begnügen, das Endresultat für die reflektierte Amplitude hinzuschreiben:

$$E_p \left[\int_{u_\alpha}^{u_\beta} du \cos(kt - \tilde{\sigma}) - \int_{u_\alpha}^{u_\beta} du \int_{u_\alpha}^{u} du_1 \int_{u_1}^{u_\beta} du_2 \cos(kt - \tilde{\sigma} - \tilde{\sigma}_1 - \tilde{\sigma}_2) + \ldots \right], \tag{28}$$

wo $u = \frac{1}{2} \lg (\varepsilon \operatorname{tg} x)$ ist. (28')

Nachdem also durch besondere Wahl der Variablen das Problem auf die L.sche Reihe zurückgeführt worden ist, greifen wir auf die aus dieser Reihe abgeleitete Differentialgleichung (10) zurück, der wir folgende Form geben:

$$f''(u) - i\,\tilde{\sigma}' f'(u) - f(u) = 0, \tag{29}$$

wo die Akzente die Differentiation nach u andeuten.

Setzt man

$$f(u) = y(u) \cdot z(u),$$

so wird aus (29):

$$y'' + y' \left(\frac{2z'}{z} - i\delta' \right) + y \left(\frac{z''}{z} - i\delta' \frac{z'}{z} - 1 \right) = 0. \tag{30}$$

Sei nun z durch die Gleichung:

$$\frac{2z'}{z} = i\delta'$$

bestimmt; indem wir ein Partikularintegral

$$z = e^{\frac{i}{2}\delta}$$

nehmen, wird aus (30):

$$y'' + y \left(\frac{i}{2} \delta'' + \frac{\delta'^2}{4} - 1 \right) = 0. \tag{31}$$

Sehen wir jetzt

$$\left| \frac{i}{2} \delta'' + \frac{\delta'^2}{4} \right|$$

als klein gegenüber Eins an, eine Voraussetzung, die nachher eingehender untersucht werden soll, so geht (31) über in:

$$y'' - y = 0, \tag{32}$$

deren allgemeines Integral durch

$$y = c_1 \, e^u + c_2 \, e^{-u}$$

gegeben ist, wenn c_1 und c_2 willkürliche Konstanten sind. Mithin ist

$$f(u) = (c_1 \, e^u + c_2 \, e^{-u}) \, e^{i\delta}$$

und da $f(u_\alpha) = 1$, $f'(u_\beta) = 0$ nach einer Bemerkung auf p. 31 ist, wird

$$f(u) = e^{\frac{i}{2} \left((\delta(u) - \delta(u_\alpha) \right)} \frac{\mathfrak{Cof}\,(u - u_\beta) - \frac{i}{2}\,\delta'(u_\beta)\,\mathfrak{Sin}\,(u - u_\beta)}{\mathfrak{Cof}\,(u_\alpha - u_\beta) - \frac{i}{2}\,\delta'(u_\beta)\,\mathfrak{Sin}\,(u - u_\beta)}, \tag{33}$$

indem wir uns der hyperbolischen Funktionen bedienen. Folglich wird die Elongation der reflektierten Welle nach Formel (11):

$$-A \frac{\left[\mathfrak{Cof}\,(u_\alpha - u_\beta) \cdot \mathfrak{Sin}\,(u_\alpha - u_\beta) \right] \cos kt - \left[\frac{\delta'(u_\alpha)}{2}\,\mathfrak{Cof}^2(u_\alpha - u_\beta) - 2\,\delta'(u_\beta) \right] \sin kt}{\mathfrak{Cof}^2\,(u_\alpha - u_\beta)} \tag{34}$$

wo für $A\,E_s$ resp. E_p zu setzen ist und u_α und u_β durch ihre in den Formeln (26′) und (28′) stehenden Werte zu ersetzen sind, indem $x = \alpha$ resp. β ist. Geschieht dies, so erhält man folgende Endformeln:

$$\begin{aligned} R_s &= -E_s \frac{\sin\,(\alpha - \beta)}{\sin\,(\alpha + \beta)\,\cos\Delta_s} \\ R_p &= E_p \frac{\operatorname{tg}\,(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}\,(\alpha + \beta)\,\cos\Delta_p} \end{aligned} \tag{35}$$

wobei

$$\operatorname{tg} \Delta_s = \frac{4\pi}{\lambda} \sin \alpha \left[\frac{4 \cos^2\beta}{\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\beta} \rho'_\beta - \cos^2\alpha \, \rho'_\alpha \right] \tag{36}$$

$$\operatorname{tg} \Delta_p = \frac{8\pi \sin \alpha \cos^2\alpha \, \varepsilon_\alpha \, \rho'_\alpha \operatorname{tg} (\alpha + \beta)}{\lambda \, (\varepsilon'_\alpha \sin 2\alpha + 2\varepsilon_\alpha) \operatorname{tg} (\alpha - \beta)} - \frac{32\pi \sin \alpha \cos^2\beta \, \varepsilon_\beta \, \rho'_\beta}{\lambda \, \varepsilon^2_\alpha \operatorname{tg}^2\alpha - \varepsilon^2_\beta \operatorname{tg}^2\beta}$$

ist. Δ_s und Δ_p sind die absoluten Phasenverschiebungen der beiden in den Hauptazimuten schwingenden Komponenten. Für die Amplituden ergeben sich also Werte, die von den durch die Fresnelschen Formeln gegebenen Werten nur sehr wenig abweichen.

Man erkennt aus (36), daß wegen des Faktors $\operatorname{tg} (\alpha + \beta)$ beim Brewsterschen Winkel in der Tat nahezu Zirkularpolarisation eintritt, wenn die reflektierten Komponenten gleich sind. Sollen indessen die Vorzeichen von Δ_p und Δ_s, sowie von $\Delta_p - \Delta_s$ mit der Erfahrung für jeden Einfallswinkel übereinstimmen, so sind besondere Annahmen über das Größenverhältnis von ρ'_α zu ρ'_β notwendig, Annahmen, welche ziemlich gezwungen erscheinen.

Ich halte es daher nicht für erforderlich, diese Konsequenzen weiter auszubauen, zumal die Drudesche Theorie erheblich einfachere Formeln liefert, welche zudem noch von derartigen Einschränkungen frei sind. Es ist mit Vorstehendem gezeigt, daß man mit Hilfe der L.schen Theorie unter Vermeidung mathematischer Unzulässigkeiten nur schwierig zu einer Darstellung der Beobachtungen gelangen kann. Dabei ist aber der eine Punkt, welcher für die mathematische Durchführung notwendig war, noch nicht erledigt.

Es mußte

$$\left| \frac{i}{2} \delta'' + \frac{\delta'^2}{4} \right| \text{ klein gegenüber } 1$$

sein. D. h. es muß

$$\delta'' \text{ sowohl wie } \delta'^2$$

eine unendlich kleine Größe zweiter Ordnung sein, weil wir die Größen erster Ordnung noch mitberücksichtigt haben.

Diese Forderung bedeutet für δ'^2 keine weitere Einschränkung, da ja das Quadrat des Quotienten $\frac{d}{\lambda}$ als unendlich klein zweiter Ordnung anzusehen ist. Indessen muß δ'' in seiner Abhängigkeit von x so gewählt sein, daß es eine unendlich kleine Größe zweiter Ordnung im ganzen Intervall ist.

Für die senkrecht zur Einfallsebene schwingende Komponente wird

$$\delta'' = \frac{8\pi}{\lambda} \sin \alpha \sin 2x \left[\cos^2 x \frac{d^2\rho}{dx^2} - \sin 2x \frac{d\rho}{dx} \right].$$

Soll dies eine sehr kleine Größe zweiter Ordnung sein, so darf ρ als Funktion von x nur um eine Größe erster Ordnung von der Funktion

$$\rho = d\,\frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha} \tag{37}$$

abweichen, welche man erhält, wenn man $\delta'' = 0$ setzt und die so entstehende Differentialgleichung für ρ integriert.

Für die andere Komponente führt die Gleichung $\delta'' = 0$ zu der Differentialgleichung:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\varepsilon \cos^2 x\, \rho'}{\varepsilon' \sin x \cos x + \varepsilon}\right) = 0. \tag{38}$$

Da nun ρ als Funktion von x durch die vorangegangene Bedingung als bereits näherungsweise festgelegt angesehen werden muß, so ist diese Gleichung, wenn sie eben auch näherungsweise befriedigt sein soll, aufzufassen als Bestimmungsgleichung für ε als Funktion von x, wiederum nur näherungsweise. Integriert man, so wird

$$\varepsilon = A\,(\operatorname{tg} x)^{B}, \tag{39}$$

wo A und B Konstanten sind, die mit den Anfangswerten ε_α und ε_β folgendermaßen zusammenhängen:

$$A = \varepsilon_\alpha\,(\operatorname{tg}\alpha)^{-\frac{\lg \frac{\varepsilon_\alpha}{\varepsilon_\beta}}{\lg \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}}}$$

$$B = \frac{\lg \frac{\varepsilon_\alpha}{\varepsilon_\beta}}{\lg \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}}\,.$$

Damit also die obige Schlußweise ihre Gültigkeit behält, müssen ρ und ε näherungsweise von x in der durch die Gleichungen (37) und (39) dargestellten Weise zusammenhängen; da diese Funktionen im Bereiche der Möglichkeit liegen, zumal sie nur näherungsweise erfüllt zu sein brauchen, so ist damit gezeigt, daß die L.sche Theorie mathematisch ziemlich einwandfrei durchführbar ist und mit den Experimenten einigermaßen in Einklang zu bringen ist; nur müssen erhebliche physikalische Einschränkungen, welche die Natur der Oberflächenschicht betreffen, gemacht werden.

Zusammenfassung.

1. Die Drehung der Polarisationsebene sowie die Phasendifferenz der beiden Hauptkomponenten bei gewöhnlicher Reflexion in Luft an isotropen, durchsichtigen Medien folgen bei niedrigem Brechungsindex der von Drude aufgestellten Formel. Bei hochbrechenden Substanzen gilt diese Formel nur noch angenähert, da die Dicke der Oberflächenschicht nicht mehr als sehr klein gegenüber der Wellenlänge angesehen werden kann, und zwar sind Haupteinfallswinkel und Polarisationswinkel stets kleiner als der Brewstersche Winkel.
2. Eine mehrere Wellenlängen dicke Paraffinschicht, welche auf die Oberfläche eines isotropen, durchsichtigen Mediums aufgetragen wird, wirkt auf die Phasendifferenz und Drehung der Polarisationsebene so, als ob nur eine gegenüber der Wellenlänge äußerst dünne Schicht aufgetragen wäre, d. h. es wirkt jedenfalls nur eine dem Glase zunächst gelegene sehr dünne Lamelle auf die Reflexion ein. Der Grund ist wohl darin zu suchen, daß nur die dem betreffenden Medium zunächst gelegene Paraffinschicht etwa durch Affinitätskräfte merklich beeinflußt wird, der übrige Teil der Schicht hingegen konstanten Brechungsindex aufweist.
3. An der Grenze der Totalreflexion ist die Phasendifferenz nicht gleich $-\pi$, sondern um einen sehr kleinen Betrag davon verschieden, der mit der Drudeschen Theorie nur wenig im Einklang steht; Null wird dieser Betrag erst im Gebiete der totalen Reflexion, wie es die Formel von Drude erheischt.
4. Die Fresnelsche Formel für die Phasendifferenz der Hauptkomponenten bei der Totalreflexion erleidet höchst wahrscheinlich bei amorphem Siliciumdioxyd und vielleicht auch bei durchsichtigen hochbrechenden Gläsern eine Ausnahme.
5. Die Untersuchungen von Quinke über die Elliptizität bei der „Totalreflexion“ an dünnen Lamellen sind zum Teil bestätigt worden, z. T. finden sich Abweichungen von denselben.
6. Die Lorenzsche Theorie steht auf mathematisch unzulässiger Grundlage, liefert aber trotzdem richtige Resultate bei ihrer Weiterführung.
7. Versucht man, die Lorenzsche Theorie auf strenge Grundlage zu stellen, so stößt man auf große Schwierigkeiten mathematischer Natur. Will man denselben aus dem Wege gehen, so sind beträchtliche Einschränkungen über die physikalische Natur der Oberflächenschicht notwendig, um einigermaßen genau die Tatsachen darzustellen.

Lebenslauf.

Am 8. Februar 1882 wurde ich, Reinhard Kynast, als der älteste Sohn des Rektors G. Kynast in Breslau geboren und besuchte bis Quarta die höhere Knabenschule von Dr. K. Mittelhaus in Breslau, hernach das städtische Johannesgymnasium zu Breslau, von dem ich Ostern 1901 mit dem Zeugnis der Reife entlassen wurde.

Hierauf bezog ich die Universität Breslau, um mich dem Studium der Mathematik, Physik und Chemie zu widmen. Ich hörte daselbst die Vorlesungen der Herren Professoren:

Abegg, Baumgartner, Ebbinghaus, Franz, Frech, Hintze, Kneser, Kükenthal, Ladenburg, Landsberg, London, Lummer, O. E. Meyer, E. Neumann, Partsch, Pringsheim, Rosanes, Schaefer, Stern, Sturm

und beteiligte mich an den Übungen der Herren Professoren:

Abegg (2 Semester), Baumgartner (6), Freudenthal (1), Ebbinghaus (1), Kneser (2), Ladenburg (1), London (2), Lummer (3), O. E. Meyer (3), E. Neumann (5), Rosanes (3).

Während des Sommersemesters 1903 hörte ich an der Universität und technischen Hochschule in Zürich die Vorlesungen und Übungen der Herren Professoren:

Burckhardt, Hurwitz und Kleiner.

Allen diesen meinen hochverehrten Lehrern sage ich meinen tiefgefühlten Dank, insbesondere den Herren Professoren Lummer und Neumann, ersterem für die Anregung zu der vorliegenden Arbeit und das freundliche Interesse, mit dem er dieselbe stets begleitet hat, letzterem für die Ausbildung und die Anregungen, die er mir auf dem Gebiete der theoretischen Physik hat zuteil werden lassen.